NOUVELLE CONTRIBUTION

A L'ÉTUDE

DES

BARRAGES EN ARC

CONDITIONS D'ÉCONOMIE MAXIMUM
EFFETS DES VARIATIONS DE TEMPÉRATURE

PAR

G. IPPOLITO

Ingénieur civil
Professeur d'Hydraulique Industrielle à l'École Polytechnique Supérieure de Naples

Traduit et adapté

PAR

J. BOUDET

Ingénieur A. et M.
Membre de la Société des Ingénieurs civils de France
et de l'« Associazione Elettrotècnica Italiana » (Sez. di Torino)

Extrait des **Nouvelles Annales de la Construction**
Novembre, Décembre 1924 et Janvier à Juillet 1925.

PARIS ET LIÉGE
LIBRAIRIE POLYTECHNIQUE CH. BÉRANGER
PARIS, 15, RUE DES SAINTS-PÈRES, 15
LIÉGE, 8, RUE DES DOMINICAINS, 8

1927

Tous droits réservés.

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF ILLINOIS

Nov243
Nov44

ÉTUDE

DES

BARRAGES EN ARC

NOUVELLE CONTRIBUTION

A L'ÉTUDE

DES

BARRAGES EN ARC

CONDITIONS D'ÉCONOMIE MAXIMUM
EFFETS DES VARIATIONS DE TEMPÉRATURE

PAR

G. IPPOLITO

Ingénieur civil
Professeur d'Hydraulique Industrielle à l'École Polytechnique Supérieure de Naples

Traduit et adapté

PAR

J. BOUDET

Ingénieur A. et M.
Membre de la Société des Ingénieurs civils de France
et de l'« Associazione Elettrotecnica Italiana » (Sez. di Torino)

Extrait des **Nouvelles Annales de la Construction**
Novembre, Décembre 1924 et Janvier à Juillet 1925.

PARIS ET LIÉGE
LIBRAIRIE POLYTECHNIQUE CH. BÉRANGER
PARIS, 15, RUE DES SAINTS-PÈRES, 15
LIÉGE, 8, RUE DES DOMINICAINS, 8

1927

Tous droits réservés.

*

627.8
Ip 5s Fb

TABLE DES MATIÈRES

Pages

Préface de l'Éditeur 1
Considérations générales 2
Notations. — Symboles 9

CHAPITRE PREMIER

Statique des barrages en arc.

1) Arc d'épaisseur constante soumis à une pression hydrostatique uniforme. 13
2) Arc d'épaisseur variable soumis à une pression hydrostatique uniforme 25
3) Arc d'épaisseur constante soumis à une pression hydrostatique variable. 28
4) Arc d'épaisseur constante soumis à son poids propre. . . 30
5) Arc d'épaisseur variable soumis à une charge variable. . 39
6) Solidarité des anneaux de la voûte. 45

CHAPITRE II

Conditions d'économie maximum dans les barrages en arc.

1) Anneau de voûte de volume minimum. 49
Formules approximatives pour le calcul d'un anneau de voûte 51
Influence de la déformabilité de l'anneau de voûte. . . 56
2) Profil théorique rationnel des barrages à corde constante. 57
Épaisseur au sommet 61
Calcul d'un anneau de voûte de volume minimum. . . 64
Application numérique. 69
Barrages en arc de volume total minimum 70
Volume élémentaire des anneaux de voûte dans un barrage en arc à corde constante 72
3) Économie maximum dans un barrage à profil symétrique et de corde constante 76

Civil Engin. Coll. copy 1 30 Aug 31 Stack

271169

Pages

4) Économie maximum dans un barrage à parement amont vertical et de corde constante 78
5) Comparaison entre les 2 types d'ouvrages ci-dessus . . . 80
Calcul des barrages en arc à corde variable 83
Application numérique 90
6) Conditions d'économie maxima dans les barrages à corde variable 94

Exemple numérique de calcul d'un barrage 97

CHAPITRE III

Influence des variations thermiques.

1) Calcul direct des barrages en arc en tenant compte des efforts thermiques 104
2) Facteurs tendant à limiter les efforts dus aux variations thermiques 113
3) Calcul des efforts intérieurs dus à une distribution quelconque des températures dans un barrage en arc . . . 116
4) Variations thermiques extérieures au barrage 124
5) Distribution des températures à réservoir plein 128
6) Distribution des températures à réservoir vide 135
7) Phénomènes thermiques dus à la prise du ciment 149
8) Contraction du béton de ciment pendant la prise 154
9) Résultats des mesures directes de températures exécutées dans ces dernières années 157

ÉTUDE

DES

BARRAGES EN ARC

PRÉFACE DE L'ÉDITEUR

La question des barrages en arc, si controversée chez nous, depuis que des techniciens aussi ingénieux qu'avisés ont essayé d'y introduire les méthodes américaines — lesquelles comptent, à l'heure actuelle, près de 40 années de références (1) — est une question des plus passionnantes, dont l'importance aussi bien que l'actualité n'échappent à personne, à l'heure, surtout, où les projets d'aménagements de nos ressources hydrauliques sont, de toutes parts, entravés par les prix quasi-prohibitifs de la construction.

Aucune note définitive n'a pourtant été donnée, encore, à ce jour, sur cette question capitale (2). Aussi, sommes-nous heureux de pouvoir offrir à nos lecteurs la primeur d'un ouvrage de haute valeur, récemment paru en Italie (3), et qui fait déjà autorité en la matière, au delà des Alpes, venant après les magistrales études de Creager, en Amérique.

Cet ouvrage, dû à la haute compétence de M. l'ingénieur Girolamo Ippolito, professeur à l'École Polytechnique supérieure de Naples, a été traduit et adapté au caractère de notre technique par M. Boudet, ingénieur A. & M., membre de l' « Associazione Elettrotecnica Italiana » et de la Société des Ingénieurs civils de France.

---

(1) Les plus anciens de ces ouvrages sont, en effet — du moins à notre connaissance, — ceux de la Bear Valley et de Sweet Water, dont les caractéristiques principales sont résumées ci-après :

	BEAR VALLEY	SWEET WATER
Date de la construction	1884	1888
Hauteur totale	19,51 *m.*	27,43 *m.*
Longueur de l'arc, au sommet	91,44 —	115,82 —
Épaisseur en crête	0,975 —	3,658 —
— base	6,096 —	14,021 —
Matériaux constitutifs	Granit	Gneiss

(2) Puisqu'on s'en tient encore, en Amérique, c'est-à-dire dans leur pays d'origine, à une méthode de calculs approchés. Méthode excellente aussi, du reste, parce qu'ayant reçu, depuis longtemps, la consécration de l'expérience.

(3) *Sul Calcolo delle Dighe ad Arco*, par M. G. Ippolito. Hoepli, éditeur, Milan, 1923.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES

Une des caractéristiques dominantes de l'évolution qu'a prise en ces dernières années la construction des barrages est la faveur croissante dont jouissent, auprès des techniciens des deux mondes, les barrages en arc, tant à arche unique qu'à arches multiples, par rapport aux types classiques de barrages à gravité.

D'apparition relativement récente dans le champ de nos moyens techniques, on les voit se multiplier chaque jour davantage, et, d'application relativement timide au début, même dans les pays de toutes les audaces (1), aborder, aujourd'hui, les problèmes les plus importants, tant comme hauteurs d'ouvrages que comme largeurs de vallées.

Les progrès constamment réalisés depuis cette apparition, et le perfectionnement de leur technique, montrent bien qu'il ne s'agit pas là d'un « caprice de mode » ou d'une nouveauté momentanément en faveur, mais que leur choix est toujours justifié par de sérieuses raisons d'économie et de sécurité; et si l'avis de certains techniciens, prévoyant que ce type de barrages est appelé à supplanter complètement le type à gravité, est peut-être excessif (2), il n'en demeure pas moins certain que ces ouvrages présentent, par rapport à ce dernier type, des avantages marqués qui, une fois surmontées par une plus large expérience les méfiances et les hésitations qui subsistent encore — justifiées, du reste, par la prudence qui s'impose pour des ouvrages dont la rupture est invariablement une catastrophe — motiveront, à n'en point douter, un essor

(1) En l'espèce, le barrage d'Ithaque (N.-Y.) qui, projeté pour une hauteur de 30 *m.*, dans une gorge mesurant 27 *m.* de largeur en base, fut limité, en 1903, à 10 *m.* de hauteur, en raison des doutes qu'émirent, à l'époque, les techniciens, au sujet de la hardiesse de cette construction d'un nouveau genre (*Trans. Am. S. C. E.*, v. 53, p. 183).

(2) Ing. JORGENSEN *Papers Am. Soc. of Civil Engineers* 1917.

beaucoup plus large des barrages en arc, et spécialement de ceux à arches multiples.

En fait, si l'on examine de près l'état actuel de nos connaissances et des recherches expérimentales effectuées sur la stabilité des barrages à gravité, il faut bien reconnaître que certains problèmes, et non des moindres, restent à résoudre pour aboutir à une possession complète de la question, laquelle ne semble pas encore très prochaine. Certains éléments, qui, pendant longtemps, parurent négligeables — quand ils n'étaient pas insoupçonnés —, comme par exemple, les efforts dûs aux sous-pressions, aux variations de température, à la poussée des glaces, au retrait du béton, voient leur importance croître chaque jour, à la lumière des expériences, quand ce n'est des désastres, et certains de ces problèmes s'avérant insolubles par la seule théorie — au moins en l'état actuel de nos connaissances — il fallut bien, par la force des choses, demander à l'empirisme des indications d'ordre pratique, en l'absence de toute solution mathématique.

En raison des difficultés que rencontre forcément la détermination de cet empirisme, les résultats obtenus jusqu'à aujourd'hui sont encore incomplets. Il est néanmoins intéressant de les soumettre à un rapide examen.

En premier lieu, l'effet des sous-pressions, quelle que soit du reste leur origine, est, à coup sûr, la plus sérieuse et la plus troublante des inconnues que présente l'étude des barrages à gravité; et, si l'on considère les controverses auxquelles elle donne encore lieu entre techniciens distingués, il faut bien convenir que la solution a bien peu progressé à ce jour : pour les uns, la pression de l'eau serait à considérer comme agissant sur toute la longueur d'une section avec une valeur constante et égale à la pression hydrostatique; pour les autres, selon une loi décroissant linéairement de la valeur de la pression hydrostatique, à l'amont, jusqu'à zéro à l'aval; pour d'autres encore, on devrait adopter une valeur de la pression hydrostatique proportionnellement réduite par l'affectation

d'un coefficient variable avec chaque cas particulier (1).

Certains techniciens ont grande confiance dans les drainages pratiqués dans la masse de l'ouvrage, comme aux barrages de Marklissa, Olive Bridge, Cataract, alors que d'autres estiment que leur effet ne peut être que très limité; et il faut bien reconnaître que l'adoption de l'une ou de l'autre de ces conceptions entraîne, comme conséquences, une différence des plus sensibles dans le prix de revient de la construction.

L'effet des variations de température dans la masse des maçonneries assume également une grande importance tant par les efforts inhérents aux dilatations et contractions successives que par les fissures qu'elles peuvent occasionner dans l'ouvrage, et, sous cet aspect, le problème se rattache à celui posé par la sous-pression de l'eau, en ce sens que cette dernière se manifeste par l'intromission de l'eau dans les lézardes dûes aux lésions produites par les variations thermiques

De date récente seulement, nous possédons des données précises résultant d'observations rigoureuses faites dans l'intérieur de la masse de certains ouvrages, et relatives non seulement à la répartition des températures dans cette masse, mais encore à la production des fissures consécutives aux contractions thermiques; et, quoiqu'il reste beaucoup à faire pour épuiser la question, les observations faites ont, entre autres choses, mis clairement en évidence, et de façon insoupçonnée,

---

(1) A cette conception — qui représente un moyen terme entre les deux précédentes — s'est ralliée dernièrement la Commission instituée par le ministère des Travaux publics d'Italie pour l'élaboration du règlement d'administration publique régissant actuellement l'établissement des barrages, tandis que, plus récemment encore, sur rapport d'une Commission du Conseil général des Ponts et Chaussées, le ministre des Travaux publics de France a prescrit, dans une circulaire en date du 19 octobre 1923, que dans le calcul des barrages en maçonnerie il n'y aurait pas lieu de tenir compte des sous-pressions, mais que leur structure en devrait être préservée par l'emploi de dispositifs pratiques dont l'efficacité puisse être en tout temps contrôlée (masque de M. Lévy, ou réseau de drainage; galeries et puits visitables).

l'ampleur des manifestations thermiques qui se produisent invariablement lors de la prise du ciment.

L'adoption des joints de dilatation, aujourd'hui employés sur une large échelle, vise bien à réduire l'effet des variations thermiques, mais il ne faut pas se dissimuler, toutefois, que la constitution de ces joints, aussi bien que la disposition rationnelle à leur donner représentent un problème encore mal résolu.

Quant à la méthode fondamentale de détermination des efforts internes dans un barrage à gravité, la sécurité à laquelle on est arrivé ne dépasse point celle que fournit l'empirisme dans les problèmes précédents. La théorie de l'élasticité ne permet, en effet, une solution rigoureuse du problème que dans le cas du barrage à profil triangulaire pour lequel la conservation des sections planes se déduit de façon certaine; encore ses conclusions ne se peuvent-elles adopter que dans l'hypothèse de la parfaite indéformabilité de la section d'encastrement en base. Et quant aux ouvrages de profils pratiques, malgré les récentes et remarquables études de Lévy, Platzmann et Guidi — pour ne citer que les principaux — on ne peut rien conclure d'autre, sinon que l'hypothèse de la conservation des sections planes est à préférer à tout autre, à défaut de mieux.

Semblable divergence de vues se remarque encore, en ce qui concerne la pression due à l'expansion thermique de la glace, qui, selon le climat et l'altitude, se forme à la surface des réservoirs, en amont des ouvrages; or, il est avéré que ce phénomène produit des pressions qui, pour être encore mal définies, n'en sont pas moins très élevées.

En résumé, aucune des inconnues principales que pose l'étude des barrages à gravité n'est arrivée à une solution définitive, et le calcul de ces structures, malgré tant d'efforts et de recherches expérimentales, demeure encore — quoique dans des limites cependant plus restreintes qu'il y a un siècle — basé sur des hypothèses fondamentalement arbitraires.

Et aucune amélioration à cette situation ne semble, désormais, rapidement possible parce que, du point mort auquel la question est arrivée, elle ne pourra sortir que par les résultats de recherches expérimentales bien coordonnées, à effectuer en particulier sur les ouvrages existants (1).

Par contre, dans les barrages en arc, l'application directe des formules de résistance apparaît nettement comme plus sûre. La structure peut être mieux proportionnée aux efforts qu'elle supporte en ses différentes parties, et, par suite, les matériaux beaucoup mieux utilisés; et, s'il est vrai que certaines inconnues, inhérentes aux barrages à gravité, se retrouvent dans le calcul des contreforts (pour les barrages à arches multiples), elles sont toutefois en nombre moindre et les plus dangereuses se trouvent précisément éliminées, en particulier les sous-pressions et les efforts dûs aux variations de température.

Si, à ces avantages incontestables, on ajoute ceux — non moins importants — d'une plus grande rapidité d'exécution et d'une plus grande économie, ainsi que d'une plus grande souplesse d'adaptation aux échancrures et terrains de fondation les plus variés (les contreforts pouvant, si nécessaire, — dans le type à arches multiples, — être fondés séparément, même avec des procédés de fondation différents), il faut bien reconnaître que la faveur croissante dans laquelle on tient aujourd'hui ce type d'ouvrages n'a rien de surprenant.

Il n'est pas inutile, toutefois, de rappeler ici que la récente catastrophe survenue en Italie au barrage de Gleno (2), dont la rupture parut, tout d'abord, devoir ébranler la confiance toujours croissante des techniciens dans les structures à

(1) A signaler comme particulièrement intéressant le procédé de mesure inventé par l'ingénieur Kambo et basé sur la relation existant entre la résistance électrique d'un conducteur et la pression à laquelle il est soumis (*Ann. del. cons. sup. delle Acque*, v. III, 1921).

(2) Voir, au sujet de « *la rupture du barrage du Gleno* », notre étude descriptive de l'ouvrage, critique et analytique de la catastrophe, parue dans la *Houille blanche* (J. Rey, éditeur, Grenoble, 1924). J. Boudet.

arches multiples, n'a fait en réalité que raffermir cette confiance : les résultats de l'enquête, confiée à nos éminents collègues, les professeurs Danusso, Ganassini et Torti, ayant démontré surabondamment que la rupture n'était imputable qu'aux vices de construction relevés dans le soubassement de l'ouvrage constitué, comme on le sait, par un barrage à gravité implanté au fond de la gorge et servant de socle au barrage à arches multiples, alors que ce dernier, malgré d'évidentes malfaçons et des bétons très poreux, parce que faiblement dosés, a parfaitement résisté, dans toutes les parties où il était fondé directement sur le rocher, non seulement à la pression hydrostatique, mais encore aux efforts pneumatiques dus à l'engouffrement par la brèche de l'énorme masse d'eau qui s'échappait du réservoir et à ceux — non moins importants — de dislocation de la masse, produits par l'arrachement de la partie disparue de l'ouvrage.

Toutefois, la théorie des barrages en arc, quoique fondamentalement établie, demande un développement et une mise au point serrés, car, de l'examen des plus récentes théories sur leur statique, alors que ressort pourtant, très nettement, la perfection et la sécurité atteintes par le calcul, on constate cependant encore les incertitudes et divergences d'opinion, déjà relatées, quant aux problèmes que pose l'économie de la construction.

La question, on le voit, est d'importance, et mérite d'être serrée de près, tant pour fixer le critérium des solutions constructives les plus rationnelles que pour permettre la détermination préalable, au moins approximative, des dépenses de construction susceptibles d'être comparées avec celles nécessitées par tout autre type de barrage — comparaison indispensable et de laquelle découle presque toujours, à sécurité égale, le choix du type d'ouvrage à adopter. Or, toutes les études publiées à ce jour en la matière sont incomplètes; certaines même erronées, et il nous semble qu'une épuration, suivie d'une mise au point les groupant, s'impose de plus en

plus. La récente étude de M. Ippolito apporte, sous ce rapport-là, une contribution très importante, sinon tout à fait décisive, à l'avancement de la question, et nous nous faisons un devoir de donner ci-après, à nos lecteurs, une analyse aussi complète que possible de son magistral travail (1).

Il est toutefois à remarquer, pour l'intelligence de ce qui va suivre, que l'auteur, se cantonnant sur le terrain pratique, a adopté, dans beaucoup de problèmes, un procé é approximatif consistant dans la substitution à l'analyse de fonctions trop complexes et peu maniables, celle de fonctions approximatives, complètement différentes dans leur expression analytique, mais qui ne s'écartent que fort peu de la réalité dans leurs valeurs numériques et dont la détermination s'effectue, du reste, en construisant graphiquement les fonctions effectives, puis, par leur allure, limitée aux besoins de la pratique, en déduisant la forme la plus appropriée à donner aux fonctions approximatives; la détermination des constantes qui entrent dans l'expression des fonctions choisies découlant de la théorie des carrés minima.

Il semble bien, en effet, que, dans la technique des constructions, ce procédé est suffisamment justifié, en ce sens que l'on peut toujours être supposé ignorer la loi analytique et connaître expérimentalement, par points, la marche du phénomène, et que, d'autre part, nombreux sont les domaines scientifiques dans lesquels est normalement admise l'interprétation d'un phénomène par des fonctions analytiques approximatives.

Par ailleurs, enfin, il ne semble point que la hardiesse du procédé adopté par M. Ippolito dépasse beaucoup celle, d'usage courant, qui consiste à négliger certains facteurs secondaires d'une question, ou certains termes d'une expression analy-

(1) Voir Ing. Girolamo Ippolito, *Sul calcolo delle dighe ad arco*, Hoepli, éditeur Milan, 1923.

tique, ou encore à représenter une fonction, développée en série, par les seuls premiers termes du développement.

L'avantage capital du procédé consistant dans l'entière liberté que l'on a pour le choix de la fonction représentative, il en résulte que, s'il présente l'inconvénient d'un calcul assez laborieux, il peut, par contre, être d'une heureuse application à tous les problèmes constructifs dans lesquels la complexité des formules dissuade généralement d'une analyse serrée.

NOTATIONS — SYMBOLES

Dans tout ce qui va suivre, les mêmes notations et symboles reviendront régulièrement, quels que soient les problèmes traités. Afin de les mettre en évidence, nous les avons groupés dans le tableau ci-après, auquel nos lecteurs voudront bien se reporter, en cas de doute sur la signification des signes rencontrés dans les formules, si par hasard leur explication manquait.

l	= corde	de l'arc baricentrique [1], dans un anneau de barrage en arc.
r	= rayon	
f	= flèche	
s	= développement	
$2\varphi_0$	= angle au centre (ou amplitude)	
r_e	= rayon d'extrados	d'un anneau de barrage en arc.
h	= épaisseur	
V	= volume	
$\eta = \frac{r}{h}$	= rapport du rayon moyen à l'épaisseur	
L	= corde	du barrage entier.
R	= rayon moyen	
R_e	= rayon d'extrados	
A	= hauteur	
W	= volume	

(1) Ou lieu des centres de gravité.

p_e = pression hydrostatique unitaire sur l'extrados;

$p = p_e \times \frac{r_e}{r}$ = — — rapportée à l'arc baricentrique;

t = température;

T = valeur maximum de la température;

τ = temps;

Θ = période de temps;

σ, ς = efforts unitaires intérieurs (positifs, en compression);

k = coefficient de sécurité à la compression

E = module d'élasticité

ρ = densité

γ = poids spécifique

α = coefficient de dilatation linéaire

c = chaleur spécifique

K = coefficient de conductivité thermique interne

} des matériaux constitutifs du barrage.

CHAPITRE PREMIER

STATIQUE DES BARRAGES EN ARC

Les barrages en arc [1] sont essentiellement de deux types, le type à arc unique, appuyé directement sur les flancs de la vallée à barrer, qui n'est possible que dans les gorges assez étroites, et le type à arches multiples, appuyées sur des piles intermédiaires en maçonnerie, lequel permet d'aborder des vallées de plus grande ouverture.

Bien qu'il soit généralement admis qu'au delà de la limite,

$$L = 2{,}5\ A$$

le barrage en arc perd ses caractéristiques d'économie au profit du barrage « à gravité », en réalité, il est difficile de préciser jusqu'à quelle valeur de la corde on peut considérer le barrage comme « arqué »; et à partir de laquelle, ensuite, on doit l'entendre comme « à gravité ». Tout barrage étant généralement établi en plan, suivant un arc de plus ou moins grand rayon, tient à la fois de l'un et de l'autre type.

Dans les ouvrages de très grand rayon (généralement $R \geq 200$ mètres), il est d'usage constant, en Europe, de négliger complètement la résistance comme voûte; en Amérique, au contraire, de nombreux ingénieurs estiment que pour ces ouvrages, la pression hydrostatique doit être divisée en deux parties dont la plus petite — (égale à $5 \div 8$ % de la pression totale) — agit comme charge affectant l'arc : cette façon de voir est, du reste, justifiée par le désir qu'ont ces techniciens d'éviter qu'un barrage en arc arrive à coûter davantage qu'un barrage établi en ligne droite, et il suffit, pour cela, de diminuer la charge en proportion de la plus grande longueur qu'affecte l'ouvrage, comme con-

(1) Également appelés « barrages en voûte ».

séquence de son implantation en courbe. Toutefois, il ne faut pas perdre de vue que, dans la préférence souvent donnée au type en arc, même pour des vallées très larges, entrent souvent d'autres considérations, d'ordres bien divers, mais en particulier celle de diminuer des effets dûs aux variations de température.

L'augmentation de dépenses est, dès lors, compensée, dans une mesure non négligeable, par une plus grande sécurité contre des efforts qui, en certaines circonstances, peuvent devenir dangereux.

Dans les ouvrages en courbe de petit rayon, la résistance comme arc est notablement plus importante; elle est, presque toujours, considérée comme la seule efficace à opposer à la poussée de l'eau, et, dans ce but, on suppose la voûte décomposée en anneaux élémentaires supposés superposés mais sans aucune solidarité entre eux, hypothèse toute en faveur de la stabilité, ainsi que l'a établi l'éminent professeur Guidi (1).

Dans les barrages à arches multiples, cependant, les génératrices des voûtes étant toujours inclinées sur l'horizontale d'un angle de 45 à 60°, la décomposition s'effectue selon des plans normaux aux génératrices; on obtient alors des arcs pour lesquels la pression de l'eau n'est pas constante des naissances à la clef, lesquels sont, en outre, sollicités, en partie par leur poids propre, et, comme conséquence, le calcul devient plus compliqué, surtout pour les anneaux supérieurs, pour lesquels est plus accentuée la diversité des pressions, au point que, dans la plupart des cas, on redresse la partie supérieure de l'ouvrage selon les génératrices verticales (2).

---

(1) Certes, les théories basées sur la résistance simultanée comme arc et comme mur, ne manquent point : Ritter, *Die berechnung von bogenförmigen Staumauern*, Karlsruhe, 1913; Shirrefs, Harrisson et Woodard, *Trans. Am. Soc. of Civ. Eng.*, v. 53, p. 155; mais leurs inconvénients, consistant surtout en calculs fastidieux, ne sont nullement compensés par la rigueur des résultats à attendre de leur supériorité, du reste toute apparente, sur les autres méthodes.

(2) Voir, par exemple, le barrage de San Dieguito (*Eng. News Rec.*, 10 avril 1919).

Quant à la constitution même des barrages en arc, il semble bien que le matériau par destination soit le béton armé, dans la masse duquel on peut, cependant, noyer des blocs de dimension telle qu'ils ne gênent pas pour la disposition des armatures qu'il est important de maintenir rigoureusement, car il est avéré que les efforts de traction sont difficilement évitables dans ces ouvrages et qu'il serait, en conséquence, risqué de les établir en maçonnerie ordinaire ou en béton non armé.

L'étude générale de la statique des barrages en arc implique donc celle de l'arc constitutif élémentaire dans les différents cas susceptibles d'être rencontrés en pratique; cette étude est exposée ci-après :

1. — Arc d'épaisseur constante soumis a une pression hydrostatique uniforme.

Jusqu'à ces dernières années, le calcul d'un arc placé dans ces conditions s'effectuait par la formule suivante :

$$(1) \qquad h = \frac{rp}{k}.$$

Dans laquelle h = l'épaisseur de l'anneau de voûte (de hauteur unitaire);
r = le rayon de l'arc baricentrique;
p = la pression hydrostatique par unité de longueur de l'arc baricentrique;
et k = le coefficient de sécurité à la compression du matériau constituant la voûte.

Étant connue la pression unitaire de l'eau sur l'extrados (p_e), la pression (p) rapportée à la fibre moyenne sera :

$$p = p_e \times \frac{r + \frac{h}{2}}{r}$$

et, par substitution dans (1) =

$$h = \frac{r\, p_e}{k - \frac{p_e}{2}}$$

Au cas où serait assigné le rayon d'extrados $r_e = r + \frac{h}{2}$, la formule (1) serait encore valable en prenant $(p_e\ r_e)$ à la place de (p_r). Ces formules découlent, du reste, de l'hypothèse d'après laquelle l'arc baricentrique, qui est la courde funiculaire correspondant à la pression hydrostatique uniforme, représente la courbe effective des pressions. Mais le développement de la théorie de l'élasticité a montré que la courbe des pressions s'écarte — bien qu'assez légèrement — de la fibre moyenne, par suite de l'effet de la déformation élastique de la voûte, et a donné une possibilité de calcul rationnel pour cette dernière.

Le procédé le plus simple, dans le cas qui nous occupe, est celui de l'ellipse d'élasticité, développé par Ritter, qui, dans son étude sur les barrages en arc (1), développe analytiquement le calcul pour un arc de section constante, en procédant comme suit :

Si l'on ne fait pas état de la déformation élastique, la résultante, pour chaque section transversale, est notoirement normale et baricentrique, avec, pour valeur (pr). Par l'effet de la déformation élastique, il se produit une réaction supplémentaire des naissances (H_p) appliquée au centre de gravité élastique de l'arc et parallèle à sa corde.

Appelant (Ω) et (W) la surface et le module de résistance de la section transversale et (y) la distance des points du noyau de chaque section à la ligne d'action de la force (H_p), la pression unitaire (σ) à l'extrados ou à l'intrados, sera pour une section quelconque, égale à :

$$(2) \qquad \sigma = \frac{pr}{\Omega} \pm \frac{H_p y}{W}$$

En particulier, le calcul de H_p devient facile avec les théorèmes sur l'ellipse d'élasticité, dans le cas de la section rec-

(1) Ritter, d. c. *Die Berechnung von bogeförmigen Staumauern*, Karlsruhe, 1913.

tangulaire de hauteur unitaire et d'épaisseur (h), pour laquelle :

$$\Omega = h$$

$$\text{et } W = \frac{h^2}{6}.$$

Dans cette hypothèse, Ritter a calculé la valeur de H_p sous la forme :

$$(3) \qquad H_p = pr \times \frac{h^2}{r^2 C_1 + h^2 C_2}$$

dans laquelle C_1 et C_2 dépendent exclusivement de l'amplitude ($2\varphi_0$) de l'arc.

Pour la section de clef, les valeurs de (y) sont données, pour l'intrados et l'extrados, par les formules ci-dessous :

$$(4) \quad \begin{cases} y_i = r\left(1 - \dfrac{l}{s}\right) + \dfrac{h}{6} = r\left(1 - \dfrac{\sin\varphi_0}{\varphi_0}\right) + \dfrac{h}{6} \\ y_e = r\left(1 - \dfrac{l}{s}\right) - \dfrac{h}{6} = r\left(1 - \dfrac{\sin\varphi_0}{\varphi_0}\right) - \dfrac{h}{6} \end{cases}$$

et pour la section aux naissances par ces autres :

$$(4') \quad \begin{cases} y'_i = r\left(\dfrac{l}{s} - \dfrac{r-f}{r}\right) - \dfrac{r-f}{r} \times \dfrac{h}{6} = r\,C_5 - \dfrac{h}{6}\cos\varphi_0 \\ y'_e = r\left(\dfrac{l}{s} - \dfrac{r-f}{r}\right) + \dfrac{r-f}{r} \times \dfrac{h}{6} = r\,C_5 + \dfrac{h}{6}\cos\varphi_0 \end{cases}$$

également pour l'intrados et l'extrados (fig. 1 ci-après), en posant la quantité entre parenthèses égale à C_5.

Tenant compte du sens du moment ($H_p y$), les efforts maxima ressortent à l'intrados, aux naissances, et à l'extrados, en clef, à

$$\sigma'_i = \frac{pr}{h} + \frac{6\,H_p y'_i}{h^2}$$

$$\sigma_e = \frac{pr}{h} + \frac{6\,H_p y_e}{h^2}.$$

Mais l'axe baricentrique (GX), qui coïncide avec l'axe bari-

centrique de l'arc moyen étant toujours moins distant de la clef que des naissances, il s'ensuit que l'on a toujours :

$$y_e < y'_i$$

et, par suite : $\sigma'_i > \sigma_e$.

L'effort maximum se produit donc aux naissances, et du côté de l'intrados. Substituant dans la formule (2), les valeurs de Ω, W, H_p et y'_e, et rappelant que :

$$p = \frac{p_e\left(r + \frac{h}{2}\right)}{r},$$

on obtient facilement :

$$(5) \quad \sigma'_i = P_e \times \frac{h^3 C_3 + h^2 r C_4 + h r^2 \times 3 C_3 + r^3 C_1}{h^3 C_2 + h r^2 C_1}$$

où les C sont tous quantités dépendant seulement de l'amplitude $(2\varphi_0)$.

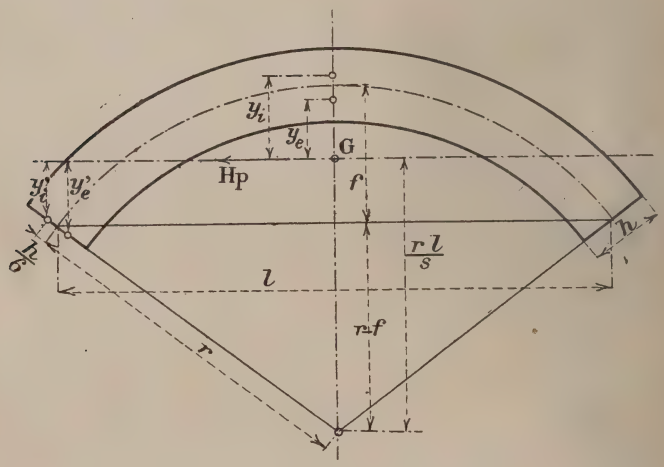


FIG. 1.

Enfin, l'excentricité (*e*) de la courbe des pressions aux naissances est donnée par :

$$(6) \quad e = \frac{h^2 r C_5}{h^2 \times 2 C_3 + r^2 C_1}.$$

Les expressions des constantes (C) en fonction des éléments

géométriques de l'arc, ou des fonctions trigonométriques de l'amplitude ($2\varphi_0$), sont :

$$(7)\quad \begin{cases} C_1 = 6\left(\dfrac{r-f}{r} + \dfrac{s}{l} - \dfrac{2\,l}{s}\right) = 6\left(\cos\varphi_0 + \dfrac{\varphi_0}{\sin\varphi_0} - \dfrac{2\sin\varphi_0}{\varphi_0}\right) \\ C_2 = \left(\dfrac{2\,s}{l} - \dfrac{r-f}{r}\right) = \dfrac{2\,\varphi_0}{\sin\varphi_0} - \cos\varphi_0 \\ C_3 = \left(\dfrac{s}{l} - \dfrac{r-f}{r}\right) = \dfrac{\varphi_0}{\sin\varphi_0} - \cos\varphi_0 \\ C_4 = \left(\dfrac{2\,s}{l} + \dfrac{3\,l}{s} - 5\dfrac{r-f}{r}\right) = \dfrac{2\,\varphi_0}{\sin\varphi_0} + \dfrac{3\sin\varphi_0}{\varphi_0} - 5\cos\varphi_0 \\ C_5 = \left(\dfrac{l}{s} - \dfrac{r-f}{r}\right) = \dfrac{\sin\varphi_0}{\varphi_0} - \cos\varphi_0 \end{cases}$$

Les valeurs des constantes (C), exprimées ci-dessus, sont données, dans le tableau I ci-après, d'après Ritter, pour ($2\varphi_0$) variant de 10 en 10°, jusqu'à 180° (1).

TABLEAU I

$2\varphi_0$	$\cos\varphi_0$	$1 - \dfrac{\sin\varphi_0}{\varphi_0}$	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
10°	0,9962	0,0012	0	1,0060	0,0049	0,0176	0,0026
20°	0,9848	0,0052	0,0008	1,0256	0,0204	0,0708	0,0100
30°	0,9659	0,0115	0,0020	1,0573	0,0457	0,1592	0,0226
40°	0,9397	0,0202	0,0042	1,1015	0,0809	0,2821	0,0401
50°	0,9063	0,0315	0,0108	1,1587	0,1262	0,4390	0,0622
60°	0,8860	0,0451	0,0201	1,2284	0,1812	0,6291	0,0389
70°	0,8192	0,0610	0,0366	1,3106	0,2457	0,8508	0,1198
80°	0,7660	0,0793	0,0642	1,4062	0,3201	1,1043	0,1547
90°	0,7071	0,0997	0,1034	1,5144	0,4036	1,3869	0,1932
100°	0,6423	0,1222	0,1584	1,6356	0,4964	1,6978	0,2350
110°	0,5736	0,1467	0,2334	1,7702	0,5983	2,0357	0,2797
120°	0,5000	0,1730	0,3308	1,9183	0,7092	2,3993	0,3270
130°	0,4223	0,2011	0,4590	2,0808	0,8291	2,7871	0,3763
140°	0,3420	0,2309	0,6240	2,2584	0,9582	3,1977	0,4271
150°	0,2588	0,2621	0,8285	2,4515	1,0963	3,6300	0,4791
160°	0,1736	0,2947	1,0848	2,6620	1,2442	4,0836	0,5317
170°	0,0872	0,3285	1,4004	2,8912	1,4020	4,5569	0,5843
180°	0	0,3634	1,7854	3,1416	1,5708	5,0514	0,6356

(1) Il peut être intéressant de noter que si l'amplitude de l'arc diminue, tendant vers zéro, l'effort maximum (σ'_i) tend à coïncider avec celui sollicitant une travée droite encastrée.

Il suffit, pour cela, de poser : $r = \dfrac{l}{2\sin\varphi_0}$ dans la formule (5) et de passer à la limite pour $\varphi_0 = 0$.

Par une méthode de calcul à peu près semblable, le professeur Guidi arrive au même résultat, synthétisé dans les formules très simples ci-dessous, transcrites avec le signe changé, puisque les efforts de compression sont considérés comme positifs :

$$(8)\qquad \begin{cases} \sigma_e = p\ \left(\dfrac{r}{h} + \mu_e\right) \\ \sigma_i = p\ \left(\dfrac{r}{h} - \mu_i\right) \\ \sigma'_e = p\ \left(\dfrac{r}{h} - \mu'_e\right) \\ \sigma'_i = p\ \left(\dfrac{r}{h} + \mu'_i\right) \end{cases}$$

dans lesquelles les valeurs de (μ) sont

$$(8')\qquad \begin{cases} \mu_e = \dfrac{1}{\delta}\left(\dfrac{s-l}{s} - \dfrac{h}{6r}\right) = \dfrac{1}{6\ \delta}\left[6\left(1 - \dfrac{\sin\varphi_0}{\varphi_0}\right) - \dfrac{h}{r}\right] \\ \mu_i = \dfrac{1}{\delta}\left(\dfrac{s-l}{s} + \dfrac{h}{6r}\right) = \dfrac{1}{6\ \delta}\left[6\left(1 - \dfrac{\sin\varphi_0}{\varphi_0}\right) + \dfrac{h}{r}\right] \\ \mu'_e = \dfrac{1}{\delta}\left[\dfrac{l}{s} - \dfrac{r-f}{r}\left(1 - \dfrac{h}{6r}\right)\right] = \dfrac{1}{6\ \delta}\left(6\,C_5 + \dfrac{h}{r}\cos\varphi_0\right) \\ \mu'_i = \dfrac{1}{\delta}\left[\dfrac{l}{s} - \dfrac{r-f}{r}\left(1 + \dfrac{h}{6r}\right)\right] = \dfrac{1}{6\,\delta}\left(6\,C_5 - \dfrac{h}{r}\cos\varphi_0\right) \end{cases}$$

(2)

avec encore :

$$(8'')\qquad \delta = \frac{s}{l} + \frac{r-f}{r} - \frac{2\,l}{s} + \frac{h^2}{6\,r^2}\left(2\,\frac{s}{l} - \frac{r-f}{r}\right)\ (1).$$

---

(1) L'identité de ces résultats avec ceux de Ritter est facile à établir. En effet, de la formule $(8'')$ on tire, en multipliant par 6 :

$$6\ \delta = 6\left(\frac{r-f}{r} + \frac{s}{l} - \frac{2\,l}{s}\right) + \frac{l^2}{r^2}\left(\frac{2\,s}{l} - \frac{r-f}{r}\right)$$

et, en substituant, les valeurs des (7) ci-dessus :

$$(8''')\qquad 6\ \delta = C_1 + \frac{h^2}{r^2}\,C_2.$$

Enfin, portant cette valeur dans l'équation (3) on obtient :

$$H_p = \frac{prh^2}{r^2\left(C_1 + \dfrac{h^2}{r^2}\,C_2\right)} = pr\,\frac{h^2}{6\ \delta r^2}.$$

qui est la valeur donnée par Guidi.

Le tableau ci-dessus comporte les valeurs de $\cos\varphi_0$ et $\left(1 - \dfrac{\sin\varphi_0}{\varphi_0}\right)$ de

Efforts de traction. — On sait combien sont dangereux pour la stabilité des barrages les efforts de traction; il est donc fort désirable de les éviter dans la plus large mesure possible et, pour cela, de connaître les limites dans lesquelles peuvent varier les éléments géométriques de l'arc pour n'avoir jamais à constater semblables efforts.

Dans ce but, Ritter observe que, l'arc considéré étant d'épaisseur constante et les efforts maxima de compression se produisant aux naissances, c'est en ces points que l'on constate l'excentricité maximum de la courbe des pressions; or la formule (6) fournit précisément la valeur (e) de cette excentricité. Pour qu'il n'y ait aucune traction à l'extrados, on devra avoir :

$$e \leq \frac{h}{6}.$$

Portant, dès lors, dans la formule (6), cette valeur-limite de (e), on obtient :

$$\frac{h}{6} = \frac{h^2 r C_5}{2 h^2 C_3 + r^2 C_1}$$

d'où : $$2 C_3 h^2 - 6 C_5 rh + C_1 r^2 = 0 \qquad (9).$$

Cette équation, résolue par rapport à (h), nous donne, pour chaque système de valeurs (r) et $(2\varphi_0)$, deux valeurs distinctes, (h_1) et (h_2), de l'épaisseur, pour lesquelles la courbe

---

manière à rendre facile le calcul des (μ) et des (y) pour une valeur quelconque du rapport $\frac{r}{h}$.

Le professeur Mörsch avait déjà traité la question en recourant aux théorèmes des dérivées du travail de déformation. Se limitant à la seule déformation due au moment fléchissant et à l'effort normal, et écrivant que le déplacement dans le sens de la corde et la rotation de la section de clef (en supposant fixe la section aux naissances) doivent être nuls, on arrive, par de faciles intégrations à déterminer la poussée et le moment à la clef (*Berechnung Kreisförmiger Gewölbe gegen Wasserdruck-Schw. Bzg.*, mai 1908).

Les résultats sont, toutefois, quelque peu différents des précédents, mais cela tient uniquement à ce que Mörsch a négligé complètement les efforts de cisaillement : si, en effet, on insère dans ses équations, l'expression de la déformation due à ces efforts, et si l'on pose $\frac{E}{G} = 3$, on retrouve, avec la méthode de Mörsch, les formules de Ritter et de Guidi.

des pressions aux naissances passe à la limite du noyau central. Si la valeur de (h) est comprise entre (h_1) et (h_2) la courbe sort du noyau, alors que si cette valeur est inférieure à (h_1) ou supérieure à (h_2) la courbe demeure entièrement dans l'intérieur du noyau et aucun effort de traction n'est à redouter dans ces conditions.

Si, par hasard, les valeurs de (h) tirées de l'équation (9) étaient imaginaires, la courbe des pressions demeurerait dans l'intérieur du noyau, quelle que soit l'épaisseur de l'arc, ce qui advient lorsque $(9\,C_3^2 - 2\,C_1\,C_3)\,r^2 < 0$, ou encore

$$2\,C_1\,C_3 > 9\,C_3^2.$$

A l'aide des données du tableau précédent et des formules (7) il est facile de voir que cette inégalité, indépendante de (r), est satisfaite pourvu que l'on ait $2\varphi_0 > 158^\circ$.

Pour une corde de 20 mètres et pour différentes valeurs de $2\varphi_0$, le professeur Ritter calcule les valeurs correspondantes

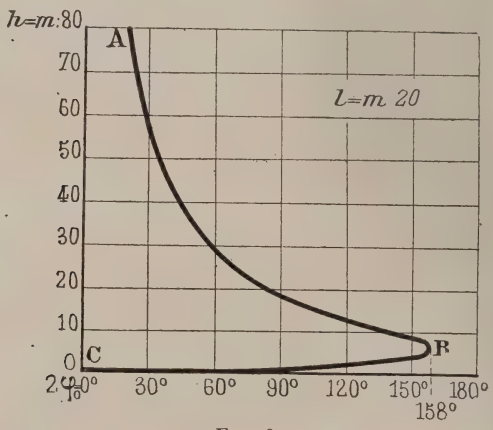


Fig. 2.

de (r), puis celles de (h) tirées de la formule (9) et construit, avec ces données, le graphique ci-dessus (fig. 2), sur lequel on remarque que, pour des valeurs de (h) et de $(2\varphi_0)$ correspon-

dant aux points situés dans la partie comprise entre la courbe et l'axe vertical, existent des efforts de traction à l'extrados des naissances, alors que, pour les valeurs correspondant aux points situés en dehors de cette partie du graphique, aucun effort de traction n'affecte l'arc.

Cependant, l'examen attentif de ce graphique montre que la courbe est construite, pour la plus grande partie, hors des limites de la pratique, car on verse, en effet, dans l'absurde si l'on envisage qu'avec une corde de 20 mètres seulement l'épaisseur de l'arc puisse atteindre des valeurs de plusieurs dizaines de mètres... Il en résulte que toute la partie de ce graphique située au-dessus de l'horizontale correspondant à $h = 10$ m. (environ), doit être considérée comme sans intérêt au point de vue pratique et que seul l'arc inférieur (C B) de la courbe est utilisable, en ce qu'il donne, pour chaque amplitude de l'arc, une valeur maximum de l'épaisseur au-dessous de laquelle on ne peut descendre sans obtenir des efforts de traction.

La question étant, toutefois, de trop grande importance pour qu'on puisse s'en tenir à un seul exemple, il ne semble pas inopportun, quelle que soit l'autorité qui s'y attache, de compléter l'analyse de Ritter pour en tirer des indications plus générales.

Si l'on divise par (h^2) l'équation (9) ci-dessus, (η) représentant le rapport $\left(\frac{r}{h}\right)$ on obtient

$$C_1 \eta^2 - 6 C_5 \eta + 2 C_3 = 0$$

d'où :

$$(10) \qquad \eta = \frac{3 C_5 \pm \sqrt{9 C_5^2 - 2 C_1 C_3}}{C_1}.$$

M. Ippolito en a déduit les valeurs de (η), correspondant aux différentes valeurs de $(2\varphi_0)$, consignées dans le tableau suivant :

TABLEAU II.

$2\varphi_0$ (1)	$\eta = \frac{3C_5 - \sqrt{9C_5^2 - 2C_1C_3}}{C_1}$ (2)	$\eta = \frac{3C_5 + \sqrt{9C_5^2 - 2C_1C_3}}{C_1}$ (3)
30°	0,700	67,15
50°	0,704	33,82
70°	0,718	18,93
90°	0,746	10,46
100°	0,772	8,12
110°	0,802	6,39
120°	0,843	5,10
130°	0,899	4,02
140°	0,999	3,12
150°	1,132	2,33
158°	1,700	1,70

Pour une amplitude donnée, les efforts de traction se produiront toujours lorsque la valeur de (η) sera comprise entre

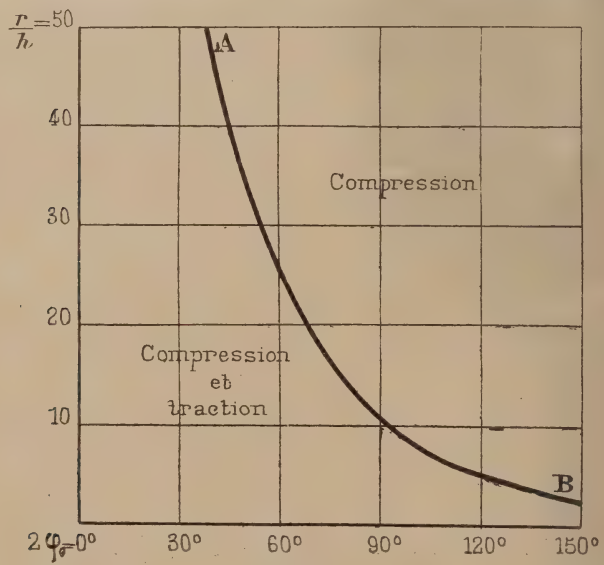


FIG. 3.

celles des deux colonnes correspondant à cette amplitude

(par exemple, pour $2\varphi_0 = 120^\circ$, entre 0,843 et 5,10); mais les valeurs de la colonne (2) (qui correspondent au signe moins de la formule) étant inférieures à celles qui sont pratiquement réalisables, en raison de l'impossibilité qu'il y a à ce que le rapport $\left(\frac{r}{h}\right)$ descende à des valeurs trop infimes, les seules valeurs à considérer sont celles de la dernière colonne du tableau. C'est avec elles qu'a été construit le diagramme ci-dessus (fig. 3).

On verra dans le chap. II ci-après, que ce rapport $\left(\frac{r}{h}\right)$ est rarement inférieur à 5, mais qu'en aucun cas, il ne convient de le considérer comme inférieur à 3; et l'on peut, en conséquence, en déduire que pour une amplitude de $130 \div 140^\circ$ la condition ci-dessus $e < \frac{h}{6}$ est pratiquement remplie.

Par ailleurs, ainsi qu'on le verra dans la suite, le rapport (η), varie généralement en raison directe de l'amplitude $(2\varphi_0)$ et en raison inverse de la pression hydrostatique. Or, dans les barrages à arches multiples, on peut bien prendre

$$2\varphi_0 > 130 \div 140^\circ,$$

de façon à éviter les efforts de traction, mais dans ceux à arc unique, implantés dans des vallées dont la section se resserre dans le thalweg, l'amplitude décroît au fur et à mesure que croît la pression hydrostatique, d'où s'ensuit que décroît le rapport (η). En outre, le tableau II précédent montre que les valeurs minima de (η) pour lesquelles on n'observe pas d'efforts de traction croissent rapidement au fur et à mesure que décroît l'amplitude; il en résulte alors que dans les anneaux inférieurs d'un barrage à arc unique il est impossible d'éviter les efforts de traction (1), quand décroît l'amplitude, spéciale-

(1) Il importe, toutefois, de ne pas perdre de vue que ces déductions sont basées sur l'hypothèse *pessima* d'une complète indépendance des anneaux, alors qu'en réalité leur solidarité tend à centraliser la courbe des pressions, et cela d'autant plus que l'anneau considéré est plus proche de la base de l'ouvrage.

ment si la charge augmente en même temps, mais qu'on peut négliger d'en tenir compte pour toutes les valeurs d'amplitudes supérieures à 130 ÷ 140°; qu'enfin à chaque amplitude correspond une valeur de (η) donnée par la dernière colonne du tableau précédent, ou par le diagramme de la figure 3, au-dessous de laquelle — c'est-à-dire pour les épaisseurs supérieures — se produisent les efforts de traction.

Semblable détermination peut être faite pour la section de clef : on obtient une équation du second degré en (h) analogue à la (9) de laquelle on déduit que la limite maximum de l'amplitude pour laquelle se produisent des efforts de traction s'établit aux environs de $2\varphi_0 = 115°$: au-dessus de cette limite, ces efforts ne se manifestent plus, quelle que soit l'épaisseur. Toutefois, si l'on tient compte de la limite pratique des valeurs de (η), comme on l'a fait pour la section aux naissances, on peut conclure que les efforts de traction seront évités, dans la section de clef, toutes les fois que l'on aura :

$$2\ \varphi_0 > 90°.$$

Efforts dus aux variations de température. — Il est aujourd'hui notoire qu'en outre des efforts dus à la pression de l'eau, il y a lieu de considérer également ceux produits par les variations thermiques.

Cet argument étant plus amplement traité ci-après, nous rappellerons seulement ici, pour mémoire, qu'une variation de température uniforme pour l'arc entier détermine, aux naissances, une réaction constituée par une force parallèle à la corde géométrique de l'arc dont la direction passe par le centre de gravité élastique de ce dernier, et dont la valeur est :

$$H_t = \frac{E\ \alpha\ th^3}{r^2\,C_1 + h^2\,C_2} = E\ \alpha\, t \times \left(\frac{h^3}{6\ \delta r^2}\right)$$

(α) étant le coefficient de dilatation linéaire, (E) le module d'élasticité du matériau, et (t) la variation de température (H. Ritter).

De son côté, Guidi a envisagé le cas d'une distribution de

température non uniforme, mais variable selon la loi linéaire de l'intrados à l'extrados; et, supposant cette variation décomposée en une uniforme et une linéaire, mais avec une valeur nulle sur la fibre moyenne, il arrive par un calcul assez simple aux formules ci-après :

$$(11)\qquad \begin{cases} \varsigma_e = -\mathrm{E}\,\alpha\,(t_0 \dfrac{h}{r}\mu_e - \dfrac{\Delta t}{2}) \\ \varsigma_i = \mathrm{E}\,\alpha\,(t_0 \dfrac{h}{r}\mu_i - \dfrac{\Delta t}{2}) \\ \varsigma'_e = \mathrm{E}\,\alpha\,(t_0 \dfrac{h}{r}\mu'_e + \dfrac{\Delta t}{2}) \\ \varsigma'_i = -\mathrm{E}\,\alpha\,(t_0 \dfrac{h}{r}\mu'_i + \dfrac{\Delta t}{2}) \end{cases}$$

dans lesquelles les (ς) représentent les efforts unitaires en clef et aux naissances, à l'extrados et à l'intrados, dus à la température (efforts également changés de signes, en considérant comme positifs les efforts de compression); (t_0) la variation moyenne de la température; (Δt) = la différence de température entre les deux parements du barrage (1).

2. Arc d'épaisseur variable soumis a une pression hydrostatique uniforme.

Dans le but d'égaliser les efforts maxima en clef et aux naissances, on envisage parfois d'augmenter l'épaisseur, par diminution du rayon de courbure, au voisinage des naissances; toutefois, dans ce cas particulier il ne convient plus de recourir à un calcul direct comme pour l'arc d'épaisseur constante mais, préférablement, de procéder par vérifications.

Étudiant séparément les deux solutions pour avoir une idée de leur convenance propre, Ritter a tracé une épure de statique graphique pour certains cas déterminés, et, substituant à

(1) Ainsi qu'on le verra plus loin, la contraction que subit le béton au moment de la prise détermine également dans la masse des efforts non négligeables et analogues à ceux produits par les variations de température.

l'arc circulaire une polycentrique avec différents rayons opportunément choisis, il arrive à obtenir que la courbe des pressions se rapproche au maximum, vers les naissances, de l'arc baricentrique, améliorant ainsi les conditions d'équilibre statique de la voûte.

Cependant, l'avantage qui en résulte est si léger, pour les arcs de grande amplitude, qu'on peut le considérer comme négligeable (1).

Par ailleurs, l'épure montre que, pour une même augmentation d'épaisseur aux naissances, entre deux arcs ayant même ligne baricentrique dont une d'épaisseur constante et l'autre d'épaisseur croissante de la clef aux appuis, la courbe des pressions est, dans ce dernier, plus rapprochée de l'arc baricentrique, tant à la clef qu'aux naissances; et le fait se vérifie aussi bien pour une augmentation vers les naissances de l'épaisseur constante, précédemment envisagée, que pour une réduction de cette même épaisseur à la clef. Dans ce dernier cas, cependant, l'arc d'épaisseur variable présente un volume moindre et est soumis à des efforts également moindres que dans le premier, ce qui permet de réaliser une sensible économie sur le cube des matériaux à mettre en œuvre, en même temps qu'une légère amélioration de leurs conditions de travail.

A cet effet, Ritter propose la méthode suivante :

Supposant construit un arc d'épaisseur constante (h), calculé de façon qu'aux naissances on ait :

$$\sigma'_i = k$$

(k) étant la charge de sécurité à la compression, la valeur de (h) se déterminera par tâtonnements au moyen de la formule (5) ou de la dernière des (8), étant connues les valeurs de (r), de ($2\,\varphi_0$) et, par conséquent, des (C).

---

(1) La conclusion qui s'en dégage est que l'adoption de cette disposition, avantageuse dans les barrages à arche unique, n'est nullement conseillable dans les barrages à arches multiples, pour lesquels l'amplitude des arcs est généralement très voisine de 180°.

Dans le but de réduire progressivement l'épaisseur de l'arc, vers la clef, jusqu'à avoir, en ce point, une épaisseur réduite (h_0), si l'on admet que cette réduction doit être sans influence sur la valeur de H_p et que, par suite, on a toujours :

$$H_p = pr \frac{h^2}{r^2 C_1 + h^2 C_2},$$

l'effort maximum à la clef, sera donné par :

$$\sigma_e = \frac{pr}{h_o} + \frac{6 H_x y_e}{h_o^2}$$

dans laquelle (y_e) est relatif à la section réduite d'épaisseur (h_0), c'est-à-dire, pour les (4) :

$$y_e = r \left(1 - \frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0}\right) - \left(\frac{h_0}{6}\right).$$

Par substitution, et si l'on remarque que, la variation de longueur de l'extrados qui découle de la modification des épaisseurs pouvant être considérée comme négligeable, on peut toujours avoir :

$$pr = p_e \left(r + \frac{h}{2}\right),$$

$$\text{on a : } \sigma_e = p_e \left(r + \frac{h}{2}\right) \left\{ \frac{1}{h_0} + \frac{h^2}{r^2 C_1 + h^2 C_2} \times \frac{6}{h_o^2} \left[r \left(1 - \frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0}\right) - \frac{h_0}{6} \right] \right\}$$

d'où on tire, en posant $\sigma_e = k$:

$$(12) \quad \frac{k}{p_e \left(r + \frac{h}{2}\right)} \times h_o^2 - \left(1 - \frac{h^2}{r^2 C_1 + h^2 C_2}\right) \times h_0 - \frac{6 r h^2 \left(1 - \frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0}\right)}{r^2 C_1 + h^2 C_2} = 0$$

équation du second degré, en (h_0), dont l'unique racine positive donne la valeur à assigner à l'épaisseur en clef (1).

Par ailleurs, comme nous l'avons dit, une variation de

(1) Cette méthode permet d'obtenir une économie générale de 5÷6 % sur le volume total du barrage (RITTER).

l'épaisseur de l'arc peut également être désirable, dans le but d'éviter complètement les efforts de traction à l'extrados des naissances. Dans ce cas, il convient, non seulement de réduire l'épaisseur de la clef, mais encore de renforcer cette même épaisseur vers les naissances.

Si l'amplitude de l'arc satisfait à l'inégalité :

$$130 \div 140^{\circ} > 2\,\varphi_0 > 90^{\circ} \div 100^{\circ},$$

de façon que l'on n'ait aucun effort de traction à la clef, alors qu'ils peuvent être envisagés aux naissances (bien que de faible intensité), on peut déterminer, avec la formule (5) ou les (8), la valeur de (h), puis augmenter graduellement les épaisseurs vers les naissances. En admettant que cette augmentation progressive soit légère au point de ne pas influer sur la position de la courbe des pressions, si l'on appelle (h_1) l'épaisseur aux naissances, il faudra avoir, pour la (6), posant l'excentricité : $e = \frac{h_1}{6}$:

$$(13) \qquad h_1 = \frac{6\,h^2\,r\,C_5}{2\,h^2\,C_3 + r^2\,C_1} \qquad (**)$$

3. — Arc d'épaisseur constante soumis a une pression hydrostatique variable.

Dans les problèmes précédemment envisagés, on a toujours supposé que la pression hydrostatique était constante sur tout le développement de la section d'extrados; mais nous avons dit qu'il n'en allait pas toujours ainsi, spécialement dans les barrages à arches multiples. Dans ces ouvrages, en effet, si l'on suppose les voûtes (dont les génératrices sont inclinées) décomposées en anneaux par des plans normaux à la direction des génératrices, la pression hydrostatique ne sera plus uniforme, puisque la clef se trouvera sous le plan d'eau, à une profondeur inférieure à celle des naissances.

(**) Le procédé n'est, toutefois, admissible que si la valeur de (h_1), ainsi calculée, est peu différente de (h).

Ce cas a été amplement traité par Guidi; nous renverrons le lecteur au texte original (1). Toutefois, l'auteur donne une intéressante solution graphique pour n'importe quelle distribution symétrique des pressions normales à l'extrados; et, dans le cas où la loi d'une telle distribution peut être considérée comme parabolique, avec pour valeur (p) aux naissances et (μp) en clef $\left[(p)\right.$ étant toujours rapporté à la fibre moyenne, et, par conséquent, $p = p_e \left.\frac{r + \frac{h}{2}}{r}\right]$, le calcul se développe analytiquement, aboutissant, pour la poussée totale à la clef, (H), et pour son moment (m) par rapport au centre de gravité élastique de l'arc, aux valeurs suivantes :

$$(14) \qquad H = pr\left[\mu\left(1 - \frac{h^2}{6\,\delta r^2}\right) + 8\,(1-\mu)\left(\frac{r}{s}\right)^2 \frac{\varepsilon}{\delta}\right]$$

$$m = pr^2\left\{\mu\,\frac{(s-l)}{s} + 2\,(1-\mu)\left[\frac{1}{6} - \left(\frac{2r}{s}\right)^2\left(\frac{s-l}{s}\right)\right]\right\}$$

dans lesquelles les symboles ont les valeurs et significations indiquées ci-dessus, et

$$(14') \quad \varepsilon = 2\left[\frac{1}{6}\left(\frac{s}{2r}\right)^2 + \frac{l}{s} - 1\right] -$$

$$- \frac{1}{2}\left(1 - \frac{h^2}{6\,r_2}\right)\left[\left(\frac{s}{2r}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{l}{r}\right)^2 + 2\,\frac{f}{r} \times \frac{r-f}{r}\right] +$$

$$+ \frac{l}{s}\left(1 + \frac{h^2}{3\,r^2}\right)\left[3\,\frac{l}{s} - \frac{sl}{8\,r^2} - 2\left(\frac{r-f}{r}\right) - 1\right]$$

L'exentricité (e) de la poussée (H) au centre de la section de clef, compte tenu de la distance entre ce point et le centre de gravité élastique de l'arc sera, dès lors :

$$(14'') \qquad e = \frac{m}{H} - \frac{s-l}{s} \times r = \frac{m}{H} - r\left(1 - \frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0}\right)$$

(Une table, opportunément étudiée, facilite, du reste, le calcul de ces formules.)

---

(1) *Statica delle dighe*, par le professeur Guidi, d. c.

Par l'effet de la susdite loi de charge hydrostatique, les conditions du travail dans la section de clef sont améliorées alors que, par contre, la charge maximum augmente, aux naissances, bien que d'une très petite quantité, par rapport à celle découlant d'une pression uniforme. Il est, toutefois, facile de remédier à cet inconvénient en raccordant l'intrados avec les naissances par une petite section de directrice de courbure supérieure, de telle façon qu'on puisse négliger le calcul rigoureux de la pression non uniforme (Guidi d.c.).

4. — Arc d'épaisseur constante soumis a son poids propre.

Dans l'étude de la stabilité d'un anneau de voûte à génératrices inclinées, il importe également de tenir compte du poids propre de l'anneau.

Si (γ) est le poids spécifique de la structure, le poids, ($\gamma\, h$), par mètre linéaire de développement de l'arc, pourra être supposé décomposé en une composante parallèle aux génératrices et une normale, cette dernière ayant pour valeur

$$\gamma\, h \cos \alpha$$

si (α) représente l'inclinaison des génératrices sur l'horizontale.

Pour calculer analytiquement les valeurs de (H) et de (m) dues à cette charge, uniforme le long de l'arc, et agissant normalement à la corde, M. Ippolito suit une méthode à peu près semblable à celle indiquée par le professeur Guidi, pour la pression hydrostatique variable.

Supposons, pour cela, que sur l'arc de section constante agissent deux forces verticales et symétriques, d'intensité (P); considérons le demi-arc de gauche comme encastré dans la section de naissances (m-n) et libre en clef sous l'action de la force (P) et de la poussée (H) parallèle à la corde, et obligeons

la poussée (H) à passer par le centre de gravité élastique (G′) du demi-arc, à l'aide du moment (*m*) (fig. 4).

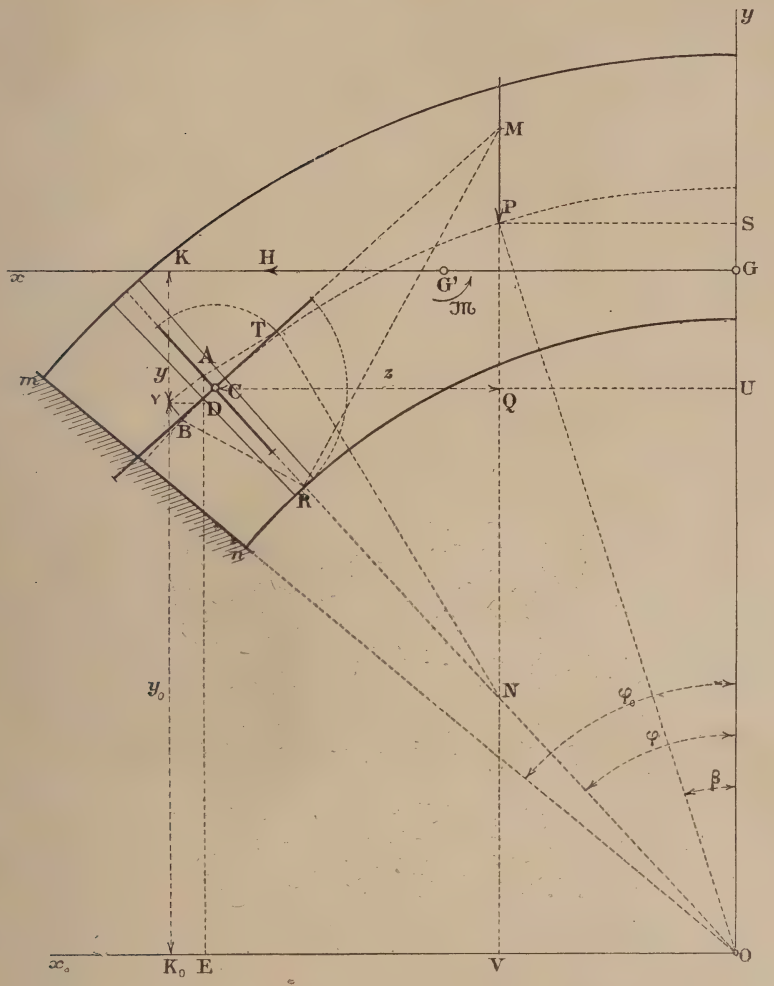


Fig. 4.

La section de clef ne pouvant ni tourner ni se déplacer parallèlement à la corde, on aura, de par la théorie de l'ellipse

d'élasticité, en substituant au poids élastique de chaque élément l'arc élémentaire (ds) auquel il est proportionnel :

$$(15)\qquad \begin{cases} -\frac{s}{2}m + P\int_{\beta}^{\varphi_0} zds = 0 \\ -H\ I_x + P\int_{\beta}^{\varphi_0} zyds = 0 \end{cases}$$

dans lesquelles (fig. 4) (β) est l'angle compris entre la clef et le point d'application de la force (P); (z) la distance C Q entre le centre C d'un élément d'arc et la force (P); (y) la distance Y K de l'axe Gx de l'antipôle Y de la force (P), par rapport à l'ellipse d'élasticité d'un élément d'arc; et I_x le moment d'inertie du demi-arc élastique par rapport à l'axe Gx.

Or, on sait que (voir Guidi d. c.).

$$I_x = \frac{lr^2\ \delta}{4},$$

d'autre part :

$$z = CQ = CU - QU = CU - PS = r(\sin\varphi - \sin\beta)$$
$$\text{et } y = OG - y_o$$

en appelant (y_o) la distance de Y à l'axe Ox_0; mais

$$OG = r\frac{\sin\varphi_0}{\varphi_0}$$

(G coïncidant avec le baricentre de la fibre moyenne); donc

$$y = r\frac{\sin\varphi_0}{\varphi_0} - y_o.$$

Par ailleurs, il découle de la figure (4) que

$$y_o = YK_0 = DE = AE - AD$$
$$\text{et } AE = AO\cos\varphi = (r + CA)\cos\varphi$$

Or :
$$CA = \frac{\rho^2}{CN}$$

ρ étant le carré du demi-petit axe de l'ellipse d'élasticité de l'élément; et, d'autre part :

$$CN = r - NO = r - \frac{OV}{\sin\varphi} = r\,\frac{PS}{\sin\varphi}$$

$$= r - \frac{r\sin\beta}{\sin\varphi} = r\,\frac{\sin\varphi - \sin\beta}{\sin\varphi}$$

$$CA = \frac{\rho^2}{r} \times \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi - \sin\beta}\,;\ \text{et :}$$

$$AE = \left(r + \frac{\rho^2}{r} \times \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi - \sin\beta}\right)\cos\varphi$$

Enfin, $AD = AY \sin\varphi$, puisque $\widehat{AYD} = \varphi$; et $AY = CB = \frac{\rho_1^2}{CM}$,

ρ_1 étant l'autre demi-axe de l'ellipse d'élasticité de l'élément.

Remarquant que

$$CM = CN\,tg\,\varphi = \left(r\,\frac{\sin\varphi - \sin\beta}{\sin\varphi}\right) tg\,\varphi,$$

on a : $CB = \frac{\rho_1^2}{r\,tg\,\varphi} \times \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi - \sin\beta}$

et $AD = \frac{\rho_1^2}{r} \times \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi - \sin\beta}$

puis finalement :

$$y = r\left(\frac{\sin\varphi_0}{\varphi_0} - \cos\varphi\right) + \left[\frac{\rho_1^2 - \rho^2}{r}\left(\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi - \sin\beta}\right)\right].$$

Si l'on tient compte de ce que $ds = r\,d\varphi$, on peut alors passer au calcul des intégrales :

$$\int_\beta^{\varphi_0} z\,ds = r^2 \int_\beta^{\varphi_0} (\sin\varphi - \sin\beta)\,d\varphi = r^2\left[(\cos\beta - \cos\varphi_0) - \right.$$

$$\left. - (\varphi_0 - \beta)\sin\beta\right]$$

$$\text{et} \int_\beta^{\varphi_0} zy\,ds = r^3 \int_\beta^{\varphi_0} \left(\frac{\sin\varphi_0}{\varphi_0} - \cos\varphi\right)\left(\sin\varphi - \sin\beta\right) d\varphi +$$

$$+ r\left(\rho_1^2 - \rho^2\right) \int_\beta^{\varphi_0} \sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi =$$

$$= -r^3 \frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0}(\varphi_0 - \beta)\sin\beta - r^3 \frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0}(\cos\varphi_0 - \cos\beta) +$$
$$+ r^3 \sin\beta(\sin\varphi_0 - \sin\beta) + \frac{r}{2}(\rho_1^2 - \rho^2 - r^2)(\sin^2\varphi_0 - \sin^2\beta)$$

Portant ces valeurs dans les équations (15), en tenant compte de ce que :

$$\rho_1^2 - \rho^2 = \frac{h^2}{4} - \frac{h^2}{12} = \frac{h^2}{6};$$

que : $\frac{r}{s} = \frac{1}{2\varphi_0}$, et : $\frac{r}{l} = \frac{1}{2\sin\varphi_0}$,

on obtient, après réductions :

$$(16)\quad \begin{cases} m = \Pr\left(\dfrac{\beta\sin\beta}{\varphi_0} + \dfrac{\cos\beta}{\varphi_0} - \dfrac{\cos\varphi_0}{\varphi_0} - \sin\beta\right) \\ H = \dfrac{2P}{\mathfrak{C}}\left[-\dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{h^2}{6r^2}\right)\dfrac{\sin^2\beta}{\sin\varphi_0} + \dfrac{\beta\sin\beta}{\varphi_0} + \right. \\ \qquad + \dfrac{\cos\beta}{\varphi_0} - \dfrac{\cos\varphi_0}{\varphi_0} - \\ \qquad \left. - \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{h^2}{6r^2}\right)\sin\varphi_0\right] \end{cases}$$

Les équations (16), peuvent être utilisées pour une quelconque distribution symétrique des forces normales à la corde. En particulier, dans le cas qui nous occupe, remplaçons :

$$P = \gamma \cos\alpha \times h\, r\, d\beta$$

par :

$$\gamma_1 h\, r\, d\beta$$

en faisant $\gamma_1 = \gamma \cos\alpha$, et intégrons les formules (16) par rapport à (β) entre les limites 0 et φ_0, nous aurons :

$$m = \gamma_1 h r^2\left[\frac{1}{\varphi_0}\int_0^{\varphi_0} \beta \sin\beta\, d\beta + \frac{1}{\varphi_0}\int_0^{\varphi_0} \cos\beta\, d\beta - \right.$$
$$\left. - \frac{\cos\varphi_0}{\varphi_0}\int_0^{\varphi_0} d\beta - \int_0^{\varphi_0} \sin\beta\, d\beta\right]$$

$$\text{et}\quad H = \frac{2\,\gamma_1 h\,r}{\mathfrak{C}}\left[-\frac{1}{2}\left(1+\frac{h^2}{6\,r^2}\right)\frac{1}{\sin\varphi_0}\int_0^{\varphi_0}\sin^2\beta\,d\beta\,+\right.$$

$$+\frac{1}{\varphi_0}\int_0^{\varphi_0}\beta\,\sin\,\beta\,d\beta+\frac{1}{\varphi_0}\int_0^{\varphi_0}\cos\,\beta d\beta-\frac{\cos\varphi_0}{\varphi_0}\int_0^{\varphi_0}d\beta-$$

$$\left.-\frac{1}{2}\left(1-\frac{h^2}{6\,r^2}\right)\sin\,\varphi_0\int_0^{\varphi_0}d\beta\right]$$

Développant les intégrales, et réduisant, on a :

$$(17)\quad\begin{cases} m=\gamma_1 h\,r^2\left(\dfrac{2\,\sin\,\varphi_0}{\varphi_0}-\cos\,\varphi_0-1\right)\\ H=\dfrac{\gamma_1 hr}{\mathfrak{C}}\left[\dfrac{h^2}{6\,r^2}\left(\dfrac{1}{2}\cos\,\varphi_0-\dfrac{\varphi_0}{2\,\sin\,\varphi_0}+\varphi_0\,\sin\,\varphi_0\right)-\right.\\ \quad-\dfrac{7}{2}\cos\,\varphi_0-\dfrac{\varphi_0}{2\,\sin\,\varphi_0}+\dfrac{4\,\sin\,\varphi_0}{\varphi_0}-\\ \quad\left.-\varphi_0\,\sin\,\varphi_0\right] \end{cases}$$

Si maintenant nous nous reportons à l'équation (8″) et posons :

$$(18)\quad\begin{cases} C_6=\dfrac{2\,\sin\,\varphi_0}{\varphi_0}-\cos\,\varphi_0-1\\ C_7=6\left[-\dfrac{7}{2}\cos\,\varphi_0-\dfrac{\varphi_0}{2\,\sin\,\varphi_0}+\dfrac{4\,\sin\,\varphi_0}{\varphi_0}-\right.\\ \quad\left.-\varphi_0\,\sin\,\varphi_0\right]\\ C_8=\dfrac{1}{2}\cos\,\varphi_0-\dfrac{\varphi_0}{2\,\sin\,\varphi_0}+\varphi_0\,\sin\,\varphi_0 \end{cases}$$

il sera, dès lors, facile de mettre les formules ci-dessus (17) sous la forme, très simple, ci-après, dans laquelle les (C) sont uniquement fonction de φ_0

$$(19)\quad\begin{cases} m=\gamma_1 h\,r^2\,C_6\\ H=\gamma_1 h\,r\,\dfrac{C_7+\dfrac{h^2}{r^2}C_8}{C_1+\dfrac{h^2}{r^2}C_2} \end{cases}$$

Maintenant, il peut aussi se faire qu'au lieu du moment (m) il convienne de connaître l'excentricité (e) de la poussée (H) par rapport au centre de la section de clef; on l'obtiendra, par la formule (14″) ci-dessus :

$$(19') \qquad e = r\,\frac{C_9 + \frac{h^2}{r^2}C_{10}}{C_7 + \frac{h^2}{r^2}C_8}, \text{ en posant encore,}$$

$$(18') \quad \begin{cases} C_9 = C_1 C_8 - \left(1 - \dfrac{\sin\varphi_0}{\varphi_0}\right) C_7 \\ C_{10} = C_2 C_8 - \left(1 - \dfrac{\sin\varphi_0}{\varphi_0}\right) C_8 \end{cases}$$

Dans la section de clef, on aura, par conséquent, une pression normale et un moment, donnés par :

$$(20) \quad \begin{cases} H = \gamma_1 h r \times \dfrac{C_9 + \frac{h^2}{r^2}C_8}{C_1 + \frac{h^2}{r^2}C_2} \\ M = He = \gamma_1 h r^2 \times \dfrac{C_9 + \frac{h^2}{r^2}C_8}{C_1 + \frac{h^2}{r^2}C_2} \end{cases}$$

et dans la section de naissances, nous aurons une pression normale :

$$N = P \sin\varphi_0 + H \cos\varphi_0,$$

avec pour moment :

$$M_1 = H\,(f + e) - P\delta$$

(P) étant le poids de tout le demi-arc appliqué au milieu de sa longueur et (δ) la distance entre le centre de la section et le poids (P)

On a évidemment :

$$\begin{cases} P = \gamma_1 r h \varphi_0 \\ \delta = r\left(\sin\varphi_0 - \sin\dfrac{\varphi_0}{2}\right) \\ f = r\,(1 - \cos\varphi_0) \end{cases}$$

Portant ces valeurs dans les équations ci-dessus, en se reportant, par ailleurs, aux expressions des valeurs de (H) et de (*e*), on obtient, après réductions :

$$(21)\quad \begin{cases} N = \gamma_1 hr \times \dfrac{C_{11} + \dfrac{h^2}{r^2} C_{12}}{C_1 + \dfrac{h^2}{r^2} C_2} \\ M_1 = \gamma_1 h r^2 \times \dfrac{C_{13} + \dfrac{h^2}{r^2} C_{14}}{C_1 + \dfrac{h^2}{r^2} C_2} \end{cases}$$

ceci, en posant successivement :

$$(18')\quad \begin{cases} C_{11} = C_1 \varphi_0 \sin \varphi_0 + C_7 \cos \varphi_0 \\ C_{12} = C_2 \varphi_0 \sin \varphi_0 + C_8 \cos \varphi_0 \\ C_{13} = C_1 \varphi_0 \left(\sin \dfrac{\varphi_0}{2} - \sin \varphi_0 \right) + C_7 (1 - \cos \varphi_0) + C_9 \\ C_{14} = C_2 \varphi_0 \left(\sin \dfrac{\varphi_0}{2} - \sin \varphi_0 \right) + C_8 (1 - \cos \varphi_0) + C_{10}, \end{cases}$$

dans lesquelles les quantités (C) sont toujours fonction de la seule amplitude.

Les valeurs des (C) — de C_1 à C_5 —, établies par la méthode Ritter, figurent dans le tableau I, page 17 ; celles de C_6 à C_{14} ont été calculées par M. Ippolito pour les seules amplitudes comprises entre 120 à 180° (les amplitudes inférieures n'offrant aucun intérêt dans le cas qui nous occupe); elles sont consignées dans le tableau suivant :

TABLEAU III

$2\varphi_0$	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}
120°	0,1540	0,2790	0,5523	0,0027	0,2001	0,4395	2,0156	0,0152	— 0,2592
130°	0,1752	0,3750	0,6138	0,0050	0,2413	0,6304	2,3985	0,0291	— 0,2761
140°	0,1962	0,4872	0,6690	0,0099	0,2886	0,8831	2,8204	0,0510	— 0,2816
150°	0,2170	0,6234	0,7162	0,0163	0,3444	1,2080	3,2843	0,0917	— 0,2707
160°	0,2370	0,7779	0,7529	0,0278	0,4093	1,6275	3,7957	0,1516	— 0,2450
170°	0,2558	0,9498	0,7769	0.0462	0,4847	2,1526	4,3417	0,2471	— 0,1821
180°	0,2732	1,1412	0,7854	0,0733	0,5729	2,8050	4,9375	0,3920	— 0,0897

Avec l'aide de ce tableau, il est facile de calculer (H) (M) — (M_1)et (N) — (formules 20 et 21 ci-dessus) — une fois connues les valeurs de (h) (r) et $\gamma_1 = \gamma \cos \alpha$; et l'on peut alors déterminer, dans la forme établie plus haut, les efforts unitaires maxima :

a) *En clef :*

$$(22) \qquad \sigma = \frac{\gamma_1 r}{C_1 + \frac{h^2}{r^2} C_2} \left[\left(C_7 + \frac{h^2}{r^2} C_8 \right) \pm \frac{6r}{h} \left(C_9 + \frac{h^2}{r^2} C_{10} \right) \right]$$

b) *Aux naissances :*

$$\sigma' = \frac{\gamma_1 r}{C_1 + \frac{h^2}{r^2} C_2} \left[\left(C_{11} + \frac{h^2}{r^2} C_{12} \right) \pm \frac{6r}{h} \left(C_{13} + \frac{h^2}{r^2} C_{14} \right) \right]$$

(le signe supérieur donnant les valeurs à l'extrados et son inférieur à l'intrados) (1).

---

(1) *Exemple numérique d'application des résultats qui précèdent.* — Pour avoir une base de comparaison, nous prendrons l'arc de Guidi d. c., dont les caractéristiques sont $r = 5{,}00$ *m.* ; $2\varphi_0 = 150°$; $\left(\frac{r}{h}\right) = 12{,}5$; et appartenant à une voûte inclinée de 60°, à 15 *m.* de profondeur sous le plan d'eau normal, avec 2.200 *kg./m³* pour densité des matériaux constitutifs.

On a immédiatement : $\gamma_1 = 0{,}5 \times 2.200 = 1.100$.

Les tables (I) et (III) qui précèdent donnent les valeurs des (C); et comme on connait

$$\frac{h^2}{r^2} = \frac{1}{(12{,}5)^2} = 0{,}0064,$$

on peut dès lors déterminer les termes composés :

$$C_1 + \frac{h^2}{r^2} C_2 = 0{,}8285 + 0{,}0064 \times 2{,}4515 = 0{,}8442$$

$$C_7 + \frac{h^2}{r^2} C_8 = 0{,}6234 + 0{,}0064 \times 0{,}7162 = 0{,}6280$$

$$C_9 + \frac{h^2}{r^2} C_{10} = 0{,}0163 + 0{,}0064 \times 0{,}3444 = 0{,}0185$$

$$C_{11} + \frac{h^2}{r^2} C_{12} = 1{,}2080 + 0{,}0064 \times 3{,}2843 = 1{,}2290$$

$$C_{13} + \frac{h^2}{r^2} C_{14} = 0{,}0917 - 0{,}0064 \times 2{,}2707 = 0{,}0800$$

avec $r = 5{,}00$, on a : $\frac{\gamma_1 r}{C_1 \frac{h^2}{r^2} + C_2} = \frac{1100 \times 5}{0{,}8442} = 6.515$

5. — Arc d'épaisseur variable soumis a une charge variable.

Si la section de l'arc est variable, et semblablement chargée, le calcul analytique devient très difficile, et il convient alors de recourir à l'une des méthodes graphique ou graphico-analytique pour la vérification de la stabilité d'un arc, basées sur la théorie de l'élasticité (1).

Parmi ces méthodes, une des plus pratiques par sa simplicité est celle de Turneaure et Maurer, à peu près exclusivement employée en Amérique et que nous reporterons succinctement ci-après (2) avec quelques simplifications y apportées par M. Ippolito.

Dans cette méthode, on procède à la détermination de la poussée (H_c) et du moment (M_c) en clef, en considérant les seules déformations dues aux moments fléchissants, en tenant compte séparément, toutefois, de la déformation due à la pression normale, et des efforts thermiques.

---

et par conséquent (les efforts de compression étant seuls considérés comme positifs) :

$$\sigma_e = 6515\ (0{,}6280 + 6 \times 12{,}5 \times 0{,}0185) = \quad 1{,}31\ kg./cm^2$$
$$\sigma_i = 6515\ (0{,}6280 - 6 \times 12{,}5 \times 0{,}0185) = -\ 0{,}49\ \ —$$
$$\sigma_e = 6515\ (1{,}2290 - 6 \times 12{,}5 \times 0{,}0800) = -\ 3{,}11\ \ —$$
$$\sigma_i = 6515\ (1{,}2290 + 6 \times 12{,}5 \times 0{,}0800) = \quad 4{,}71\ \ —$$

Comme on le voit, les efforts dus au poids propre sont loin d'être négligeables, puisque, alors que la compression maximum due à la charge hydrostatique et à la température ressort, d'après les calculs de Guidi, à 36,4 $kg./cm^2$, cette valeur monte jusqu'à 41,1 $kg./cm^2$ si on fait intervenir ce poids propre.

(1) En particulier, celle de l'ellipse d'élasticité, telle que l'expose Guidi (*Statica delle Dighe*) est applicable. Toutefois, intéressante et même avantageuse lorsqu'il s'agit d'arches de ponts, dans lesquelles il convient de tenir compte des diverses hypothèses de charges, même dissymétriques, parce que les lignes d'influence, la courbe intersection des réactions, etc..., peuvent être tracées une seule fois, cette méthode appliquée aux barrages, nécessite une longue série de constructions graphiques délicates qui lui font perdre beaucoup de ses avantages, ayant souvent besoin, elles-mêmes, de recoupements analytiques pour être exemptes d'erreurs sensibles; et étant donné que, dans le cas d'un anneau de barrage, la charge la plus défavorable à envisager est la seule pression hydrostatique maximum, il convient nettement de recourir à des procédés plus expéditifs.

(2) G.-H. Hool, *Reinforced concrete construction*, 5e éd., 1916, v. III.

a). — *Moment fléchissant.* — Si l'on appelle (M) le moment en un point quelconque du 1/2 arc de gauche, — (considéré comme positif s'il tend à un accroissement de la compression à l'extrados) —, la rotation et le déplacement horizontal de la section de clef devant être nuls, en raison de la symétrie, on aura :

$$\sum My \frac{\Delta s}{E I} = 0$$

$$\sum M \frac{\Delta s}{E I} = 0$$

dans lesquelles l'intégration est étendue aux voussoirs constitutifs du demi-arc à chacun desquels correspond une longueur (Δs), un moment d'inertie moyen de la section transversale (I), une distance (y) entre le centre du voussoir et la parallèle à la corde passant par le centre de la section de clef (fig. 5 ci-après); enfin le module d'élasticité du béton (E), si le barrage est en béton armé.

Si nous divisons l'arc en voussoirs pour lesquels soit constant le rapport $\left(\frac{\Delta s}{I}\right)$, les équations ci-dessus s'écrivent, plus simplement :

$$\sum My = 0$$
$$\sum M = 0$$

(M_c) et (H_c) représentant, comme on l'a dit plus haut, le moment et la poussée (positive si elle produit une compression) dans la section de clef, si (m) représente le moment des seules forces extérieures entre la clef et le joint considéré, on aura :

$$M = M_c + H_c y - m; \tag{20}$$

substituant et résolvant les équations par rapport à H_c et (M_c), on aura :

$$\left\{ \begin{aligned} H_c &= \frac{n\sum my - \sum y \sum m}{n\sum y^2 - (\sum y)^2} \\ M_c &= \frac{\sum m - H_c \sum y}{n} \end{aligned} \right. \tag{21}$$

dans lesquelles (n) représente le nombre de voussoirs composant le demi-arc (nombre qu'il est bon se choisir entre 6 et 12, — généralement 8).

b) *Variations de température.* — Si (α) représente le coefficient de dilatation linéaire, et qu'on suppose la température de l'arc augmenter de (t^o), la corde (l) a une tendance à s'allonger de la quantité : αtl, alors que la section de clef ne subit aucune rotation. Par conséquent.

$$\sum My \frac{\Delta s}{EI} - \frac{\alpha tl}{2} = 0$$

$$\sum M \frac{\Delta s}{EI} = 0$$

Mais $\frac{\Delta s}{EI}$ est constant, et :

$$M = M'_c + H'_c y,$$

si (M'_c) et (H'_c) sont les valeurs de (M_c et (H_c) dues à la variation de température.

Par suite :

$$(22) \quad \begin{cases} H'_c = \dfrac{I}{\Delta s} \times \dfrac{nE\alpha tl}{2\,(n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2)} \\ M'_c = -\dfrac{\Sigma y}{n} H_c \end{cases}$$

Ceci, évidemment, si l'on envisage le changement de température comme positif (dans le sens d'un accroissement); il va de soi que, pour le cas d'un abaissement (H) et (M) changent de signe : (t) étant négatif.

c) *Effort normal.* — Pour tenir compte de la déformation produite par l'effort normal, considérons une compression unitaire uniforme sur tout l'arc, et de valeur (σ); on peut écrire :

$$\sigma_c = \frac{H_c}{h_m}$$

(H_c) étant la poussée à la clef, précédemment déterminée en

tenant compte de la seule déformation due à la flexion, et (h_m) l'épaisseur moyenne de l'arc (1).

On constate alors une tendance au raccourcissement $\left(\frac{\sigma_c\, l}{E}\right)$, qui peut être considérée comme agissant de la même façon qu'un abaissement de température, et conduit aux valeurs suivantes, à la clef :

$$(23)\qquad \begin{cases} H''_c = -\dfrac{I}{\Delta s} \times \dfrac{n\sigma_c l}{2\,[n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2]} \\ M''_c = -\dfrac{\Sigma y}{n} \times H_c \end{cases}$$

et en un point quelconque :

$$M = M''_c + H''_c y \quad (2).$$

Exemple de vérification de la stabilité d'un arc en béton armé. — On supposera déterminées, par les procédés empiriques, la courbe d'intrados, ainsi que les épaisseurs à clef et aux naissances, et tracé l'axe (AB) (fig. 5) — tous les calculs portant sur un élément d'arc de longueur unitaire —; (h) étant l'épaisseur de l'arc, (ω) la section des armatures — égale pour l'extrados et l'intrados —, et (δ) la distance de son centre de gravité à la rive la plus voisine. Si l'on admet que le rapport entre les modules d'élasticité du fer et du béton est égal à 10, on aura :

$$I = \frac{1}{12} h^3 + 10\,\omega\,\frac{(h + 2\,\delta)^2}{2}.$$

---

(1) Procédant ainsi, on néglige le manque d'uniformité de la compression (σ_c), légère, toutefois, étant donné la petite déviation de la courbe des pressions par rapport à l'arc baricentrique et la légère variation des épaisseurs, ainsi que la compression ultérieure produite par la poussée (H'_c), tirée de (23) — laquelle est, à vrai dire, très petite, par rapport à la poussée (H_c) due au moment fléchissant.

Quoique négligeable, cette dernière erreur peut, cependant, s'éliminer en posant, dans la première des équations (23) :

$$\sigma_c = \frac{H_c + H''_c}{h_m},$$

et en résolvant par rapport à (H''_c).

(2) Dans les formules ci-dessus, il n'est pas nécessaire de tenir compte, ultérieurement, du signe des moments et des forces, puisqu'ils ont déjà été considérés.

Prenant alors (A_1B_1) égale au développement du demi-arc

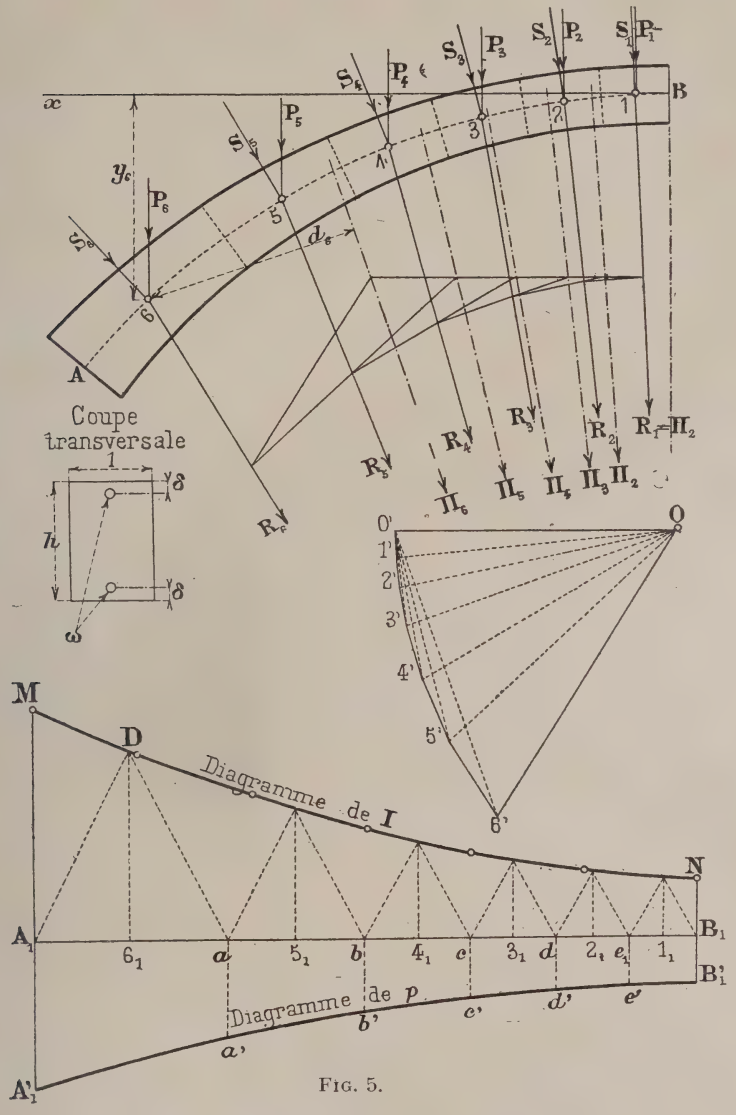


FIG. 5.

baricentrique (AB), et divisant l'un et l'autre en un même nombre de parties égales, on mesure les épaisseurs (h) corres-

pondant à chacun des points de division (1). On peut maintenant, calculer, par la formule ci-dessus, les différentes valeurs de (I), qui, portées en ordonnées sur (A_1B_1), permettent de tracer la courbe (MN) par points.

En supposant qu'on veuille diviser l'arc (AB) en 6 parties de façon que $\frac{\Delta s}{I}$ soit constant, une fois choisi, arbitrairement, la première valeur (A_1a) de (Δs), à partir de (A_1), par le joint (6_1) — milieu de (A_1a) — on mène la verticale (6_1D) et l'on joint (D) à (A_1) et à (a); puis partant de (a), on mène successivement, à (A_1D) et (Da), des parallèles en dents de scie : les triangles ainsi déterminés sont semblables et ont pour base les segments (A_1a), (ab), etc..., égaux à (Δs), et pour hauteurs respectives des segments égaux à [1]. Il s'ensuit que le rapport $\frac{\Delta s}{I}$ sera constant, et quelques essais suffisent, généralement, pour amener l'extrémité de la base du 6e triangle à tomber exactement en (B_1) [2]:

Portant alors sur l'arc (AB) les centres 1, 2, 3,... correspondant à 1_1, 2_1, 3_1... de (A_1B_1), et les divisions correspondantes en voussoirs : à chacun des points 1, 2,... agira une force d'ensemble, résultante de la composante $(\gamma \cos \alpha \; h \; \Delta s)$ du poids propre (si α = l'inclinaison sur l'horizontale des génératrices du barrage) et de la poussée $(p \;\; \Delta s)$ — (si p = la pression unitaire au droit des centres des voussoirs. Si la pression n'était pas constante, on pourrait construire le diagramme des forces (p) en dessous de la droite (A_1B_1) : les poussées seraient alors données par les surfaces $(A_1aa'A'_1)$, $(abb'a')$.... dans lesquelles le diagramme reste divisé par les ordonnées des voussoirs extrêmes, et les poids s'obtiendront simultanément, de façon semblable, en faisant intervenir le facteur $(\gamma \cos \alpha)$.

---

(1) Cette construction ne figure pas sur le graphique, pour plus de clarté.

(2) Lorsque le premier élément — côté naissances — est trop grand (c'est le cas sur la figure 5), il convient de diviser l'arc en un plus grand nombre de voussoirs.

Ayant ainsi déterminé, pour chaque voussoir, le poids (P) agissant normalement à la corde, et la poussée (S), normale à la courbe d'extrados, on peut tracer le polygone (0'6') des forces agissant sur chaque voussoir; et, par connexion avec un pôle arbitraire (0), on obtient les résultantes partielles successives (Π). Les bras de levier (d) et les ordonnées (y) s'obtiennent alors en menant, par les centres des voussoirs, les normales aux (Π) et les normales à l'axe (Bx) [1].

Possédant les valeurs de (Π), (d) et (y), on les ordonne sous la forme suivante :

VOUSSOIRS	(Π)	(d)	$m=\Pi d$	(y)	(y^2)	(my)
	Totaux.....		Σm	Σy	Σy^2	Σmy

Les valeurs des (Σ) servent à calculer rapidement les (H_c) et (M_c) données par les formules (21), (22), (23); par suite, à tracer les courbes des pressions et à déterminer les taux de travail unitaires par les procédés habituels [2].

6. — Solidarité des anneaux de la voute.

Dans ce qui précède ,nous avons admis qu'en principe il n'y avait pas de solidarité réciproque entre les différents anneaux

(1) Sur la figure — pour plus de clarté — on a tracé seulement (d_6) et (y_6).

(2) En ce qui concerne les arcs en béton armé, les procédés de calcul basés sur la théorie de l'élasticité ne tiennent aucun compte (cela serait, du reste, bien difficile...) du fait que l'axe neutre de la section relative aux moments fléchissants n'est pas baricentrique comme dans les sections homogènes. Toutefois, étant donné que, dans les arcs bien conçus, la courbe des pressions s'écarte fort peu de la ligne baricentrique, on peut estimer que l'erreur ainsi commise est négligeable.

Du reste, les expériences faites un peu partout, et spécialement en Amérique, démontrent clairement que les résultats de la théorie de l'élasticité sont en plein accord avec les faits (Voir, à ce sujet, M. Howe : *Experimental Verification of Arch Formulas, Railroad Age Gazette,* Mars 1909).

constitutifs de la voûte. Il existe, toutefois, des méthodes qui tiennent compte de cette solidarité : tant par exemple, la méthode graphique donnée par Ritter que celle, analytique, de Shirreffs (V. *Trans. Am. Soc. of C. E.*, v. 53, p. 155 ainsi que Morrison and Brodie : *Masonry Dam designs*, New-York, 1916) qui supposent que la voûte étant divisée — par des plans horizontaux et radiaux verticaux — en consoles encastrées à la base en tout point, les déformations comme arc et comme console doivent être égales en tous points. Ces déformations peuvent s'exprimer en fonction des pressions :

$$(\mu\ p)$$

et

$$(1 - \mu)\, p,$$

si l'on considère que la pression hydrostatique (p) doit être, pour une partie (μp), supposée affecter l'arc et, pour le reste, $(1 - \mu)\ p$, supposée affecter la console; l'égalité des déformations fournissant une équation qui permet de déterminer la valeur de (μ).

On peut, en effet, constater facilement qu'à chaque point de la voûte correspond une valeur de (μ) et que, par conséquent, le calcul devrait être effectué pour tous les points d'intersection d'un anneau avec une console quelconque car, en réalité, les consoles extrêmes, fixées sur les versants rocheux de la gorge (ou sur les contreforts, pour les ouvrages à arches multiples), ne peuvent se déformer qu'insensiblement, et la répartition effective des pressions sur chaque arc varie, par suite, d'un maximum aux naissances (où l'on peut estimer $\mu = 1$) jusqu'à un maximum à la clef; répartition en tous points semblable à celle que l'on a dans les arcs appartenant à des voûtes à génératrices inclinées (v. chap. III).

De même, dans les consoles, la pression varie d'un maximum au pied (où $\mu = 1$), jusqu'à un maximum au sommet. Il serait donc nécessaire d'exprimer la déformation des arcs et des consoles dues à ces répartitions variables, en chacun des (mn) points de rencontre des (m) anneaux avec

les (n) consoles; il en résulterait ($2mn$) expressions qui, égalées 2 à 2, donneraient les (mn) équations nécessaires pour la détermination des (mn) valeurs de (μ); mais le travail serait bien fastidieux...

Dans les méthodes susvisées, par mesure de simplification, on détermine les déformations seulement pour les points de clef de l'arc et pour la console qui leur correspond, en admettant que la pression (μp) est constante sur chaque arc, et pour chacun on détermine une valeur unique de (μ). Néanmoins, même ainsi simplifié, le calcul demeure encore très laborieux, tant par sa longueur que par la minutie qu'il exige pour être bien conduit; Guidi a démontré, du reste, qu'on ne pouvait lui accorder qu'une confiance très limitée, et, par ailleurs, il est inadmissible lorsque le barrage est dissymétrique — ce qui est le cas le plus général.

Toutefois, quand bien même le barrage serait symétrique, ces méthodes pourraient encore avoir quelque valeur si le déplacement du sommet de l'arc — sur la valeur duquel est basé tout le calcul de répartition des pressions — demeurait sensiblement le même, aussi bien quand la pression a une valeur uniforme que lorsqu'elle croît de la clef aux naissances. Or, Guidi prouve que le déplacement du sommet d'un arc est grandement influencé par la loi de répartition de la pression, si bien que, pour une pression croissant vers les naissances, il peut assumer des valeurs inférieures, même de moitié, à celles qu'il a pour une pression constante.

En conséquence, ces méthodes, bien qu'ayant l'apparence d'une grande précision, sont, en réalité, profondément viciées dans leur hypothèse fondamentale.

D'autre part, le calcul par éléments séparés est en faveur de la stabilité, ce qui n'est pas négligeable puisqu'il s'agit de constructions très délicates. Un tel surcroît de stabilité serait préjudiciable seulement s'il déplaçait par trop l'économie de l'ouvrage. Or, il est notoire, au contraire, que, même calculés par éléments séparés, les barrages en arc demeurent toujours

d'épaisseurs très réduites et sont presque toujours sérieusement plus économiques que ceux du type classique à gravité pleins (1).

(1) Nous disons les barrages à gravité « *pleins* », parce que, dans certains cas, du reste assez nombreux, dès qu'il s'agit de vallées quelque peu évasées, ne ressortant pas du type "gorge", les barrages à gravité évidés (ou « *creux* » deviennent alors plus économiques que les barrages en arc. — Voir, à ce sujet, notre étude sur ces ouvrages, parue dans les *Nouvelles Annales de la Construction* (numéro de juillet 1923).

CHAPITRE II

CONDITIONS D'ÉCONOMIE MAXIMUM DANS LES BARRAGES EN ARC

1. — Anneau de voute de volume minimum.

Si l'on fait abstraction des variations de température, les formules pour le calcul d'un anneau de voûte, considéré comme arc élastique, peuvent s'écrire, en se reportant aux (8) et (8′) du chapitre Ier :

$$\frac{\sigma}{p} = f\left(\frac{r}{h}, \varphi_0\right).$$

Si l'on choisit l'expression qui donne l'effort unitaire maximum (σ) à l'intrados des naissances, et si l'on pose $\sigma'_i = k$ (charge de sécurité à la compression du matériau constituant la voûte), on aura l'équation :

$$(1_A) \qquad \frac{k}{p} = f\left(\frac{r}{h}, \varphi_0\right)$$

dans laquelle le 1er membre est une quantité connue; et l'on a, dès lors, une relation entre les 2 grandeurs $\left(\frac{r}{h}\right)$, rapport du rayon moyen à l'épaisseur, et (φ_0), demi-amplitude de l'arc.

Or, dans tous les cas analogues — et ils sont nombreux — qui se présentent dans le domaine de la construction, au lieu de laisser à l'arbitraire du projeteur la détermination d'une inconnue, mieux vaut, bien souvent, le guider dans le choix de la solution qui s'avère la plus économique, parmi toutes les autres possibles, qui sont parfois une infinité.

En l'espèce, on peut chercher à déterminer l'amplitude ($2\varphi_0$) à laquelle correspond le volume de maçonnerie minimum

pour l'anneau de voûte considéré. Ce volume, exprimé en fonction de (φ_0), considérant les autres inconnues comme constantes, sera fourni par l'équation :

$$\frac{dV}{d\varphi_0} = 0.$$

conjointement avec celle ci-dessus (N° 1_A), sous la réserve, toutefois, qu'on ait :

$$\frac{d^2V}{d\varphi_0^2} > 0.$$

Pareille solution n'a pas, que nous sachions, encore été donnée, et les opinions émises à ce sujet par divers techniciens paraissent, à vrai dire, basées sur des cas beaucoup trop particuliers — voire sur des hypothèses qui, sinon absolument fausses, ne sont pas toujours vérifiables (1).

En réalité, la difficulté du problème réside dans l'impossibilité d'exprimer le volume de l'anneau de voûte en fonction de l'amplitude (φ_0). Et, effectivement, partant des formules de Guidi, si l'on se rappelle qu'à part les efforts dus aux variations de température, la pression unitaire maximum se manifeste à l'intrados près des naissances, on peut écrire :

$$k = p\left(\frac{r}{h} + \mu'_i\right)$$

μ'_i étant une fonction connue de (φ_0) et de $\left(\frac{r}{h}\right)$ (voir chapitre I^er^). Cette relation fondamentale lie les 4 paramètres dont 2 sont connus (2), et les deux ci-dessus $\left(\frac{r}{h}\right)$ et $(2\varphi_0)$ inconnus. Pour plus d'exactitude, on peut substituer à la pression hydro-

(1) Par exemple l'affirmation de Jorgensen, que l'amplitude la plus convenable serait de 133°30′, affirmation accueillie, depuis, sans vérification, par de nombreux techniciens des deux mondes, et qui repose sur l'hypothèse d'une prétendue indéformabilité de l'arc. L'hypothèse d'une amplitude constante de 180° proposée par certains, et spécialement par notre collègue M. Bonnetti, sur la base d'un calcul comparatif unique entre les deux amplitudes extrêmes de 120 et 180°, n'est évidemment pas davantage acceptable comme panacée; et la question reste à peu près entière.

(2) Le coefficient de sécurité, et la pression de l'eau.

statique unitaire (p), rapportée à la fibre moyenne, la pression effective sur l'extrados (p_e), et, si l'on pose :

$$\frac{r}{h} = \eta, \text{ on a évidemment :}$$

$$p = p_e \times \frac{r + \frac{h}{2}}{r} = p_e\left(1 + \frac{1}{2\eta}\right); \text{ et, par substitution, on aura ;}$$

$$(2_A) \qquad \frac{k}{p_e} = \eta + \frac{1}{2} + \left(1 + \frac{1}{2\eta}\right)\mu'_i \,(1).$$

Or, il est matériellement impossible d'extraire, au moyen de cette formule et des deux du renvoi (1), la valeur de (η) en fonction de (φ_0) pour la porter dans l'expression du volume de l'anneau de voûte de corde (l) :

$$V = \frac{\pi l^2}{360} \times \frac{\varphi_0}{\sin \varphi_0} \times \frac{1}{\eta}$$

dans laquelle (φ_0) est exprimé en degrés.

Il en résulte, par suite, que le problème échappe à tout procédé analytique.

Formules approximatives pour le calcul d'un anneau de voûte. — Puisqu'il est évident que les fonctions ci-dessus ne sont pas maniables, il ne peut être qu'opportun de leur substituer, dans la mesure du possible, d'autres fonctions plus simples et suffisamment approximatives pour pouvoir être utiles dans la pratique courante; et c'est là que se révèle l'ingéniosité « pratique » de la contribution de M. Ippolito à l'étude des ouvrages en arc.

---

(1) Dans laquelle, pour les (7) (8′) et (8″) du chap. Ier on a :

$$(3_A) \qquad \mu'_i = \frac{1}{\delta}\left[\frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0} - \left(1 + \frac{1}{6\eta}\right)\cos \varphi_0\right], \text{ avec :}$$

$$(4_A) \qquad \delta = \cos \varphi_0 + \frac{\varphi_0}{\sin \varphi_0} - \frac{2 \sin \varphi_0}{\varphi_0} + \frac{1}{6\eta^2}\left(\frac{2\varphi_0}{\sin \varphi_0} - \cos \varphi_0\right)$$

Cette dernière, obtenue en portant dans l'équation (8″) les valeurs de C_1 et C_2 données par la (7) (chapitre Ier).

L'examen des graphiques de Guidi (1) l'a, en effet, incité à poser carrément :

$$(5_A) \qquad \frac{k}{p_e} = \eta + a$$

équation dans laquelle la valeur de (a) est fonction de l'amplitude (φ_0) et, ultérieurement aussi, de (η). Et, dans le but de déterminer les valeurs de (a) dans les plus larges limites indiquées par la pratique il a calculé — au moyen des formules ci-dessus (2_A) (3_A) et (4_A) — les valeurs de $\frac{k}{p_e}$ pour diverses amplitudes et valeurs de η, étendant les limites de la table de Guidi jusqu'à $2\varphi_0 = 120^o$ et $\eta = 60^o$.

De l'examen des résultats de ce calcul, consignés dans le tableau IV ci-après, il ressort nettement (ainsi que le montre le graphique) que le terme $a = \frac{k}{p_e} - \eta$ varie très peu avec (η).

Le second membre de l'équation (5_A) est directement proportionnel au coefficient de sécurité (k); d'autre part, la valeur de (k) pour les diverses structures de la construction n'est jamais fixée d'une façon invariable, et il est avéré qu'un léger écart est sans influence sur l'appréciation de la stabilité d'une construction. Dans ces conditions, il est évident qu'on peut, sans inconvénient pratiquement sensible, remplacer le terme (a) par un autre s'en écartant légèrement, pourvu que la différence %, dans les valeurs de (k), qui en résulte, se maintienne dans des limites restreintes.

Prenant, alors, les valeurs ci-dessus de $\left(\frac{k}{p_e}\right)$ — Tableau IV — calculées comme données directement par une fonction représentée par l'équation (5_A) (2) on peut, pour chaque valeur

(1) Un simple coup d'œil à ces graphiques souligne, effectivement, le peu de différence qui existe entre la représentation de la fonction $\left(\frac{k}{p_e}\right)$ et la droite d'inclinaison 45°, lorsque $(2\varphi_0)$ demeure constante.

(2) Dans laquelle (a) est constante pour chaque amplitude.

TABLEAU IV.

$2\varphi'$	$\eta = \frac{r}{h}$	$\frac{k}{p_e}$	$\frac{p_e}{k}$	$\frac{V}{l^2}$	$\frac{V}{r^2}$	$\frac{V}{r_e^2}$
180°	5	7,70	0,1299	0,1571	0,6283	0,5193
	7,5	10,21	0,0979	0,1047	0,4188	0,3681
	10	12,71	0,0787	0,0785	0,3142	0,2850
	15	17,69	0,0565	0,0524	0,2095	0,1962
	20	22,68	0,0441	0,0393	0,1571	0,1495
	30	32,67	0,0306	0,0262	0,1046	0,1012
	40	42,66	0,0234	0,0196	0,0785	0,0766
	60	62,66	0,0160	0,0131	0,0525	0,0516
170°	5	8,03	0,1245	0,1495	0,5934	0,4904
	7,5	10,57	0,0946	0,0996	0,3955	0,3476
	10	13,07	0,0765	0,0748	0,2967	0,2691
	15	18,06	0,0554	0,0499	0,1979	0,1853
	20	23,05	0,0434	0,0373	0,1484	0,1412
	30	33,04	0,0303	0,0249	0,0988	0,0956
	40	43,03	0,0232	0,0187	0,0742	0,0724
	60	63,02	0,0159	0,0125	0,0496	0,0488
160°	5	8,41	0,1189	0,1440	0,5585	0,4616
	7,5	10,98	0,0911	0,0959	0,3722	0,3271
	10	13,50	0,0741	0,0720	0,2793	0,2534
	15	18,49	0,0541	0,0480	0,1863	0,1745
	20	23,49	0,0426	0,0360	0,1396	0,1329
	30	33,48	0,0299	0,0240	0,0930	0,0900
	40	43,47	0,0230	0,0180	0,0698	0,0681
	60	63,46	0,0158	0,0120	0,0466	0,0458
150°	5	8,85	0,1130	0,1403	0,5236	0,4328
	7,5	11,47	0,0872	0,0935	0,3490	0,3067
	10	14,00	0,0714	0,0702	0,2618	0,2375
	15	19,01	0,0526	0,0468	0,1746	0,1635
	20	24,01	0,0416	0,0351	0,1309	0,1246
	30	34,01	0,0294	0,0234	0,0872	0,0844
	40	44,00	0,0227	0,0175	0,0655	0,0639
	60	63,99	0,0156	0,0117	0,0437	0,0430
140°	5	9,35	0,1070	0,1384	0,4887	0,4039
	7,5	12,05	0,0830	0,0922	0,3257	0,2863
	10	14,61	0,0684	0,0692	0,2444	0,2217
	15	19,64	0,0509	0,0461	0,1630	0,1526
	20	24,65	0,0406	0,0346	0,1222	0,1163
	30	34,65	0,0289	0,0230	0,0814	0,0788
	40	44,64	0,0224	0,0173	0,0611	0,0596
	60	64,63	0,0155	0,0115	0,0408	0,0401
130°	5	9,90	0,1010	0,1381	0,4538	0,3751
	7,5	12,73	0,0786	0,0921	0,3024	0,2658
	10	15,34	0,0652	0,0691	0,2269	0,2058
	15	20,40	0,0490	0,0460	0,1513	0,1417
	20	25,43	0,0393	0,0345	0,1134	0,1079
	30	35,44	0,0282	0,0230	0,0756	0,0731
	40	45,44	0,0220	0,0173	0,0567	0,0553
	60	65,43	0,0153	0,0115	0,0379	0,0373
120°	5	10,52	0,0951	0,1396	0,4189	0,3462
	7,5	13,53	0,0739	0,0931	0,2792	0,2454
	10	16,23	0,0616	0,0698	0,2094	0,1899
	15	21,35	0,0468	0,0466	0,1397	0,1308
	20	26,41	0,0379	0,0349	0,1047	0,0997
	30	36,43	0,0274	0,0232	0,0697	0,0674
	40	46,44	0,0215	0,0175	0,0524	0,0511
	60	66,44	0,0151	0,0116	0,0350	0,0344

de $(2\varphi_0)$ déterminer la valeur la plus opportune de (a) par application de la théorie des carrés minima. En effet, si l'on désigne par (ε) l'erreur %, on aura :

$$\varepsilon \frac{k}{p_e} = \frac{k}{p_e} - \eta - a;$$

ou encore

$$\varepsilon = 1 - \frac{p_e}{k}\eta - \frac{p_e}{k}a.$$

Pour que $\Sigma\varepsilon^2$ soit minimum, il faudra qu'on ait :

$$\frac{d\sum\varepsilon^2}{da} = -2\sum\left(1 - \frac{p_e}{k}\eta - \frac{p_e}{k}a\right)\frac{p_e}{k} = o$$

c'est-à-dire :

$$a = \frac{\sum\frac{p_e}{k} - \sum\eta\left(\frac{p_e}{k}\right)^2}{\sum\left(\frac{p_e}{k}\right)^2};$$

les sommes étant supposées étendues aux différentes valeurs de (η) et de $\left(\frac{p_e}{k}\right)$ déterminées directement pour une même amplitude $(2\varphi_0)$.

Les résultats du calcul sont résumés dans le tableau suivant (N° V), dans lequel sont reportés — en 3e ligne — les pourcentages maxima d'erreurs auxquels donne lieu l'usage de cette table par rapport à l'usage régulier de la formule (5_A) laquelle, étant donné le caractère du problème, semble bien applicable tout spécialement aux arcs dont l'amplitude atteint ou dépasse 120° (1).

Tableau V.

$2\varphi_0$	180°	170°	160°	150°	140°	130°	120°
a	2,69	3,05	3,44	3,91	4,45	5,07	5,80
Erreur maximum	0,20 %	0,25 %	0,45 %	0,67 %	1,10 %	1,70 %	2,50 %

(1) C'est-à-dire pour la plupart des cas rencontrés dans la pratique.

Les erreurs constatées sont d'ordre tout à fait négligeable pour les grandes amplitudes. Elles croissent, pourtant, au fur et à mesure que diminue l'amplitude; mais il est à remarquer que la différence % de la valeur de (k) ne dépasse point, dans ce cas, 2,5 %, valeur parfaitement acceptable.

Le tableau V ci-dessus montre, d'autre part, que le terme (a) est, très sensiblement, inversement proportionnel à l'amplitude ($2\varphi_0$); et l'on peut, en conséquence, poser :

$$a = \frac{b}{\varphi_0} + c$$

et, par suite : $\frac{k}{p_e} = \eta + \frac{b}{\varphi_0} + c$, avec ($b$) et ($c$) constants.

Le pourcentage d'erreur (ε) sera alors donné par l'équation :

$$\varepsilon \frac{k}{p_e} = \frac{k}{p_e} - \eta - \frac{b}{\varphi_e} - c.$$

Et, si l'on pose :

$$\frac{\partial \sum \varepsilon^2}{\partial b} = 0; \qquad \frac{\partial \sum \varepsilon^2}{\partial c} = 0,$$

on obtient le système linéaire :

$$\begin{cases} \sum \frac{p_e}{k} \cdot \frac{1}{\varphi_0} - \sum \left(\frac{p_e}{k}\right)^2 \frac{\eta}{\varphi_0} - b \sum \left(\frac{p_e}{k} \cdot \frac{1}{\varphi_0}\right)^2 - c \sum \left(\frac{p_e}{k}\right)^2 \frac{1}{\varphi_0} = 0 \\ \sum \frac{p_e}{k} - \sum \left(\frac{p_e}{k}\right)^2 \eta - b \sum \left(\frac{p_e}{k}\right)^2 \frac{1}{\varphi_0} - c \sum \left(\frac{p_e}{k}\right)^2 = 0 \end{cases}$$

d'où l'on tire alors les valeurs de (b) et (c), retenant que les sommes doivent s'entendre appliquées à toutes les valeurs comprises dans le tableau (IV) ci-dessus.

Le calcul, assez long, mais très simple, donne :

$$(6_A) \qquad \frac{k}{p_e} = \eta + \frac{563{,}69}{\varphi_0} - 3{,}60$$

$$(6'_A) \qquad \frac{k}{p_e} = \eta + \frac{9{,}833}{\varphi_0} - 3{,}60$$

selon que φ_0 est exprimé en degrés sexagésimaux ou en radians; et l'erreur demeure toujours inférieure à 2 %, sauf, toutefois, pour l'amplitude de 120°, avec laquelle elle atteint 2,52 %.

Il en résulte que la formule (6_A) ci-dessus est donc parfaitement adoptable pour les amplitudes supérieures à 120°, c'est-à-dire dans les limites pratiques indiquées ci-dessus (1), toutes les fois que la valeur de $(2\varphi_0)$ ne sera pas fixée par avance — alors que la (5_A) est plutôt applicable dans le cas contraire (2).

---

(1) Il est notoire, au contraire, que, pour $2\varphi_0 > 133°$ (limite au-dessous de laquelle il ne convient jamais de descendre, ainsi qu'on le verra par la suite) la formule (5_A) aussi bien que la (6_A) donnent des erreurs inférieures à 1,5 %.

(2) *Influence de la déformabilité de l'anneau de voûte.* — Les formules ci-dessus tiennent compte de l'élasticité de l'arc; mais on peut également envisager le cas d'un arc indéformable. On a alors l'égalité connue $pr = kh'$ et, par suite,

$$p_e\left(1 + \frac{1}{2\eta'}\right) r = kh'$$

D'où

$$\frac{k}{p_e} = \eta' + \frac{1}{2} \qquad (7_A)$$

Par comparaison de cette dernière équation avec les deux précédentes, il résulte que le terme :

$$a - \frac{1}{2} = \frac{563{,}69}{\varphi_0} - 4{,}10$$

représente, dans ces deux dernières, l'influence de la déformation.

D'autre part, on tire de l'équation (7_A) :

$$h' = \frac{r}{\frac{k}{p_e} - \frac{1}{2}},$$

alors que, de la (5) on a :

$$h = \frac{r}{\frac{k}{p_e} - a};$$

et, par suite :

$$\frac{h}{h'} = \frac{\frac{k}{p_e} - \frac{1}{2}}{\frac{k}{p_e} - a}.$$

D'où il s'ensuit — si l'on s reporte aux valeurs de a —, que (h) est supérieure à (h') d'autant plus que l'amplitude envisagée est plus petite et que, pour une amplitude donnée (h) est d'autant plus supérieure à (h') qu'est plus petite la valeur du rapport $\left(\frac{k}{p_e}\right)$ c'est-à-dire qu'est plus petite la charge de sécurité et qu'est plus forte la pression.

Ce qui revient à dire que l'influence de la déformation élastique est d'autant plus sensible qu'est grande la profondeur de l'anneau de voûte sous le plan d'eau normal, et qu'est plus petite l'amplitude de l'arc considéré.

Ce résultat est d'autant plus important à souligner qu'il est des plus facile, par un raisonnement intuitif, de supposer que les arcs très épais, situés à de grandes profondeurs, pourraient être considérés comme sensiblement indéformables.

A titre d'exemple, si l'on suppose un arc en béton armé ($k = 30$ *kgs/cm²*)

2. — Profil théorique rationnel des barrages a corde constante.

Il est d'usage courant, dans les barrages à arches multiples, d'assigner à la corde des arches, et à leur amplitude, des valeurs constantes de la base au sommet, et complètement indépendantes de la hauteur de l'ouvrage. L'équation (5_A) fournit alors une construction très simple du profil théorique rationnel de la section transversale; et 2 cas spéciaux peuvent être envisagés séparément : celui dans lequel on veut maintenir vertical le parement amont de l'ouvrage, et celui dans lequel, au contraire, c'est la fibre moyenne qu'on entend maintenir constante de la base au sommet.

Dans le premier de ces cas, le rayon d'extrados est constant et a pour valeur :

$$r_e = r + \frac{h}{2};$$

Si on l'exprime en tonnes par mètre carré, la pression (p_e) s'identifie avec la profondeur (x) de l'anneau de voûte considéré, et l'on a :

$$\frac{k}{x} = \frac{r}{h} + a,$$

d'où :

$$h = \frac{r_e x}{k - a' x} \qquad (8_A).$$

ayant posé : $a' = a - \frac{1}{2}$

---

présentant une amplitude de 150°, et situé par 15 *m.* de profondeur, on aura :

$$h = \frac{20 - \frac{1}{2}}{20 - 3{,}91}\, h' = 1{,}21\, h'$$

C'est-à-dire plus d'un cinquième d'épaisseur en plus. Et, si ce même arc était immergé par 50 *m.* de profondeur, on aurait au contraire :

$$h = \frac{6 - \frac{1}{2}}{6 - 3{,}91}\, h' = 2{,}74\, h',$$

c'est-à-dire une épaisseur presque triple de celle de l'arc indéformable correspondant !...

Cette égalité montre que le profil rationnel du parement aval est un arc d'hyperbole équilatère ayant pour asymptotes : une parallèle au parement amont, dont la distance à ce parement est $\left(\frac{r_e}{a'}\right)$ et une horizontale menée à la profondeur

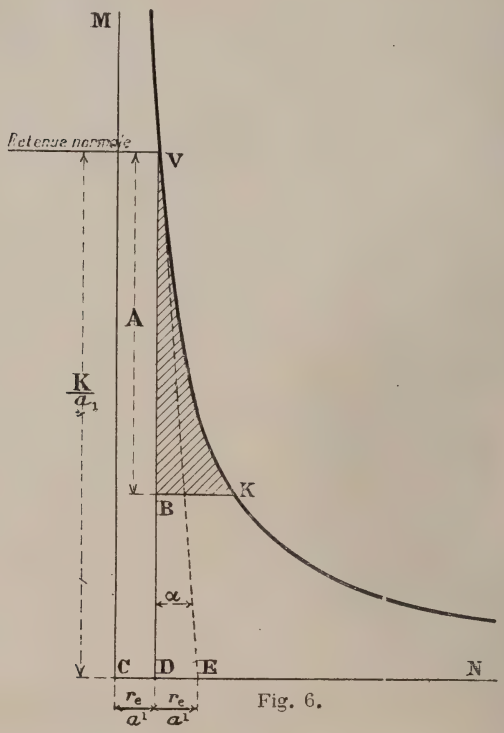


Fig. 6.

$\left(\frac{k}{a'}\right)$ sous le plan d'eau. Cette courbe étant déterminée (fig. 6), si l'on porte, à partir de V, sur la verticale VD, la hauteur VB du barrage, et si l'on mène par le point B une horizontale, on obtient en BK — entre la verticale et la courbe — l'épaisseur en base, et le fût, avec ses différentes épaisseurs, est représenté par la surface hachurée : le parement aval VK

étant tangent en V à une droite présentant, sur la verticale, une inclinaison : $\frac{r_e}{k} = \text{tg } \alpha$.

Dans le second cas, les courbes des parements devant rester symétriques par rapport à la courbe baricentrique, on aura, de même, en négligeant l'effet de la composante normale de la pression hydrostatique, et en remplaçant, dans (8_A), (a') par (a) et (r_e) par (r) :

$$\frac{h}{2} = \frac{\frac{rx}{2}}{k - ax} \qquad (9_A)$$

d'où résulte que la section est limitée par 2 arcs d'hyperboles équilatères symétriques par rapport à la baricentrique verticale VD (fig. 7) ayant une asymptote horizontale commune, distante de $\left(\frac{k}{a}\right)$ de l'horizontale du sommet et deux asymptotes verticales distantes de l'axe baricentrique de $\pm \frac{r}{2a}$. Comme précédemment, si l'on porte en VB la hauteur du barrage (A), menant, par B, une horizontale BP (fig. 7), on détermine, en KVK_1, — surface hachurée — la section transversale de l'ouvrage, et l'angle du sommet entre les parements est donné par la formule :

$$\text{tg } 2\alpha = \frac{r}{k}.$$

(2α) mesurant le dièdre formé par la tangente asymptotique aux parements amont et aval de sommet V (fig. 7).

Le volume total du barrage s'exprime alors par :

$$W = S \cdot \frac{\pi}{90} \varphi_0 r;$$

φ_0 étant exprimé en degrés, et S étant l'aire hachurée VKK_1.

Mais $S = 2 \times$ aire NVKP — rectangle $NN_1 P_1P$; et l'aire NVKP étant comprise entre un arc d'hyperbole, son asymp-

tote, et les deux ordonnées $\frac{k}{a}$ et $\frac{k}{a} - A$, on obtient très facilement :

$$\text{Aire NVKP} = \frac{rk}{2a^2} \log \frac{k}{k - Aa},$$

$$\text{rectangle } NN_1P_1P = \frac{Ar}{a};$$

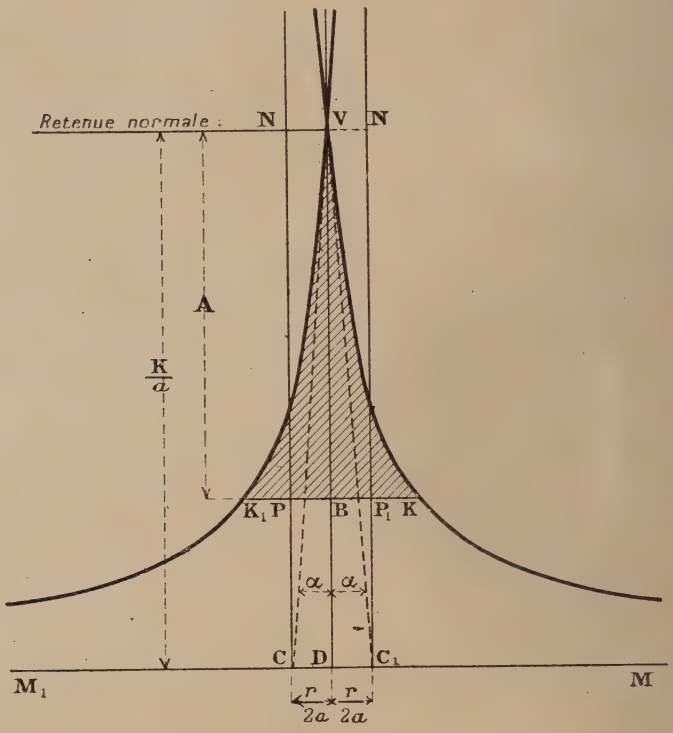


Fig. 7.

et finalement :

$$W = \frac{\pi}{90}\left[\frac{k}{2a} \log \frac{k}{k - Aa} - A\right]\frac{r^2\varphi_2}{a}$$

En pratique il est bien évident qu'on doit altérer ces profils théoriques, et les modifier, pour les rendre pratiques, de façon à donner à la crête du barrage une épaisseur convenable

(s), et une revanche (f) par rapport au niveau de retenue maximum.

Comme conséquence, dans les barrages à parement amont vertical, le parement aval sera vertical jusque à la profondeur :

$$x = \frac{ks}{r_e + a's}$$

en dessous de la crête, profondeur à partir de laquelle la directrice devient hyperbolique.

Dans le cas de barrages à parements symétriques, ceux-ci seront verticaux jusqu'à la profondeur :

$$x = \frac{ks}{r + as}$$

en dessous la crête.

Enfin, dans les barrages à arches multiples, dont les voûtes sont, le plus souvent, à génératrices inclinées, si l'on suppose la voûte divisée en anneaux par des plans normaux aux génératrices, et si l'on néglige les variations de la pression hydrostatique, en même temps que l'effet de la composante du poids propre de chaque anneau, on peut tracer le profil transversal de la voûte, par assimilation plane avec les profils qui précèdent en inclinant l'axe VD et les asymptotes des hyperboles jusqu'à les amener parallèles aux génératrices des voûtes.

Épaisseur au sommet. — L'épaisseur d'un barrage en crête doit être établie en tenant compte des efforts dus au mouvement ondulatoire des vagues et à la dilatation des glaces.

L'action des vagues est double et comporte, en même temps qu'un effet hydrostatique dû à l'exhaussement du niveau de retenue normale, lorsque la crête des vagues atteint celle du barrage, un effet hydrodynamique résultant du choc des molécules liquides dont le mouvement de propagation horizontal cesse contre le parement amont du barrage (1). L'action

(1) On peut, toutefois, assimiler ce mouvement ondulatoire — au point de vue de son influence sur la résistance de l'ouvrage — à une simple surélévation du plan de retenue normale.

des glaces est particulièrement à retenir lorsque la couche glacée, formée à une température très basse, se dilate sous l'effet d'une élévation de température. Elle est certainement beaucoup plus considérable que celle produite par le choc des glaçons flottants (1).

La question n'est pas nouvelle : dès 1891, une discussion sur ce sujet instaurée à l'Association des Ingénieurs Civils du Canada, permit à cette savante société d'estimer que, lorsque l'épaisseur de la couche de face n'atteint pas 3 pouces, on peut négliger l'effort dû à sa dilatation, et que, pour des couches plus épaisses, il suffit d'adopter pour valeur de cet effort celle de la charge de rupture de la glace. Plus tard, l'ingénieur C. L. Harrison (v. Transaction A.S.C.E. vol. LXXV, p. 219), affirma qu'on pourrait négliger l'effort de la glace :

a) Dans les réservoirs à berges peu inclinées, si la couche de glace est inférieure à six pouces;

b) Dans les réservoirs destinés à être remplis pendant la saison des pluies, et à être vidés ensuite très rapidement;

c) Dans les réservoirs qui ont en hiver un niveau d'eau notablement inférieur à celui de leur retenue normale maximum, de manière que l'effort des glaces agisse sur un point du barrage où l'épaisseur est plus considérable qu'en crête.

d) Dans les réservoirs qui ont, au niveau de leur retenue maximum, une forme telle que la force d'expansion de la couche de glace ne puisse se propager jusqu'au barrage. Aujourd'hui on étudie le problème au point de vue de la réaction périphérique d'une dalle plane sujette à des variations

---

(1) Ci-dessous, nous donnons — à titre documentaire — la valeur des efforts, dus à l'expansion de la couche de glace, qu'on a étalonnés dans certains grands barrages américains, particulièrement exposés à son action :

Barrage de	Cross River.	*kg.* 36.000	par *m. l.* de crête.
—	Quaker Bridge.	— 62.500	—
—	Croton Falls.	— 45.000	—
—	Olive Bridge.	— 70.000	—

Ces valeurs doivent, toutefois, être considérées comme excessives dans les cas — fréquents sous nos latitudes — où la couche de glace est peu épaisse.

de température. M. le Professeur Albenga (*Annali del Consiglio Superiore delle Acque*, vol III, fascicolo I), pour une dalle *carrée* donne la formule

$$p = \frac{47.500}{\varepsilon^2}$$

tandis que, pour une dalle *rectangulaire*,

$$p = \frac{47.500}{\varepsilon^2} \cdot \frac{\lambda^2 + 1}{2\,\lambda^2}$$

formules dans lesquelles (p) est la pression par unité de surface (en kgs par cmq), due à l'expansion de la couche de glace, (ε), le rapport de la largeur du champ de glace à son épaisseur et λ, le rapport de la longueur à la largeur du champ rectangulaire. Il n'y a évidemment pas lieu de donner à ces formules, qui ne peuvent tenir compte de tous les facteurs intervenant dans ce complexe problème, une valeur excessive; toutefois il est dûment établi qu'elles peuvent fournir d'excellentes indications. En Italie, le règlement relatif aux projets et à la construction des barrages, élaboré par une commission ministérielle en 1919, établit que pour les ouvrages situés dans les régions alpines, à des altitudes dépassant 800 ÷ 1.000 mètres, il y a lieu de tenir compte des sollicitations dues à l'expansion des champs de glace de grande épaisseur. A cet effet, on admet l'existence, contre la digue, d'une poussée horizontale, qui peut aller de 5 à 25 tonnes par m. l. d'ouvrage, le champ de glace ayant une épaisseur de 30 centimètres à 1 mètre et plus; maintenant il est bien évident qu'on peut négliger cette précaution, lorsque, par des dispositions appropriées ou en raison de circonstances topographiques spéciales (comme, par exemple, la faible déclivité des rives du réservoir) on est certain que l'expansion du champ de glace ne peut produire d'effort sensible. La circulaire du ministre des Travaux Publics d'Italie en date du 19 octobre 1923, établie d'après le rapport d'une commission du Conseil général des Ponts et Chaussées, stipule qu'on devra tenir compte de l'action de la glace lorsque

les circonstances locales en feront apparaître l'utilité. A ce sujet, M. Ippolito souligne qu'un facteur qui n'a pas suffisamment été envisagé jusqu'à présent, et qui, cependant, peut avoir une remarquable importance réductive sur les efforts dus à l'expansion des couches de glace est la propriété, bien connue, de ce corps, d'après laquelle son point de fusion s'abaisse au fur et à mesure que s'accroît la pression; d'où il résulte que la pression des glaces sur le parement amont du barrage croissant, les parties en contact avec la maçonnerie ont une tendance à fondre, avec, comme conséquence, une réduction de la pression exercée (1).

En général, et comme données d'ordre pratique, on peut adopter, pour le dimensionnement en crête, les largeurs ci après, aujourd'hui consacrées par plus d'un quart de siècle de références : 0,30 *m.* ÷ 0,50 *m.* pour les barrages à arches multiples en béton armé; 0,60 *m.* ÷ 0,80 *m.* pour les ouvrages semblables en maçonnerie ou béton non armé; 0,90 *m.* ÷ 1,30 *m.* pour les barrages à arche unique de faible ouverture, et jusqu'à 2 ÷ 3 *m.* pour les arches de grande ouverture.

Calcul d'un anneau de voûte de volume minimum. — La formule approchée (6_A) permet d'étudier la condition d'économie maximum pour un anneau de voûte de corde donnée.

Soit (V) le volume de l'anneau, h l'épaisseur moyenne, l la corde de l'arc baricentrique, s son développement, r son rayon et $2\varphi_0$ son *amplitude*, mesurée en radians.

On a évidemment :

$$V = sh; \qquad \frac{s}{2r} = \varphi_0; \qquad l = 2r \sin \varphi_0.$$

On déduit, en rappelant que $\frac{r}{h} = \eta$:

$$V = 2r\varphi_0 h = 2r^2\varphi_0 \frac{1}{\eta} = \frac{\varphi_0}{\sin^2 \varphi_0} \times \frac{l^2}{2\eta}.$$

(1) A ce sujet, et en même temps que les propriétés de plasticité que possède la glace, il convient de rappeler l'expérience classique qui consiste à faire traverser, sans le briser d'autre manière, un bloc de glace par un fil aux extrémités duquel on a suspendu des poids.

Si l'arc était indéformable :

$$\frac{1}{\eta} = \frac{p_e}{k}$$

et par suite :

$$V = \frac{l^2 p_e}{2k} \times \frac{\varphi_0}{\sin^2 \varphi_0}.$$

La valeur de φ_0 rendant V minimum annulera la dérivée :

$$\frac{d}{d\varphi_0}\left(\frac{\varphi_0}{\sin^2 \varphi_0}\right) = 0$$

pour laquelle, ayant déjà : $\varphi_0 = 0$;

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = 2\,\varphi_0$$

d'où résulte la valeur de l'amplitude cherchée :

$$2\,\varphi_0 = 133°34'$$

qui correspond à un arc surbaissé à près de $\frac{1}{3}$.

C'est, comme nous l'avons dit, la condition généralement imposée par les constructeurs américains.

Mais, en tenant compte de la déformation de la voûte, avec la formule (6_A) qui, pour une amplitude φ_0 exprimée en radians, s'écrit :

$$\frac{k}{p_e} = \frac{r}{h} + \frac{9{,}833}{\varphi_0} - 3{,}60$$

on obtient :

$$V = \frac{l^2}{2} \times \frac{1}{\left(\frac{k}{p_e} - \frac{9{,}833}{\varphi_0} + 3{,}60\right)\frac{\sin^2 \varphi_0}{\varphi_0}}.$$

Pour que V soit minimum, il faut que soit maximum l'expression :

$$\left(\frac{k}{p_e} - \frac{9{,}833}{\varphi_0} + 3{,}60\right)\frac{\sin^2 \varphi_0}{\varphi_0}$$

soit, en dérivant par rapport à φ_0 :

$$\left(\frac{k}{p_e} - \frac{9{,}833}{\varphi_0} + 3{,}60\right) \times \frac{2\,\varphi_0 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 - \sin^2 \varphi_0}{\varphi_0^2} + \frac{9{,}833 \cdot \sin^2 \varphi_0}{\varphi_0^3} = 0$$

d'où, par réductions :

$$\frac{k}{p_e} = 2 \times 9{,}833 \frac{\varphi_0 - \operatorname{tg} \varphi_0}{(2\varphi_0 - \operatorname{tg} \varphi_0)\varphi_0} - 3{,}60 \qquad (10_A)$$

dans laquelle φ_0 est toujours en radians.

Pour chaque valeur de $\frac{k}{p_e}$ la formule (10_A) fournit la valeur de φ_0 à laquelle correspond l'anneau de volume minimum.

Le calcul, effectué par M. Ippolito, est condensé, dans le tableau VI ci-après, qui donne, pour toutes les valeurs de φ_0, variant de degré en degré, et les valeurs correspondantes de $\frac{k}{p_e}$, les valeurs de $\frac{r}{h}$, $\frac{l}{h}$ et $\frac{V}{l^2}$, tirées des formules qui précèdent.

TABLEAU VI.

$\frac{k}{p_e}$	$2\varphi_0$	$\frac{r}{h}$	$\frac{l}{h}$	$\frac{V}{l^2}$
Inférieur à 8,92	180°	$\frac{k}{p_e} - 2{,}69$	$2\frac{r}{h}\operatorname{sen}\varphi_0$	$\frac{\varphi_0}{2\operatorname{sen}^2\varphi_0} \cdot \frac{h}{r}$
8,92	180°	6,23	12,52	0,12546
9,42	178°	6,69	13,38	0,11614
9,97	176°	7,17	14,33	0,10724
10,58	174°	7,70	15,38	0,09888
11,24	172°	8,29	16,54	0,09097
11,98	170°	8,95	17,83	0,08351
12,80	168°	9,69	19,27	0,07649
13,72	166°	10,53	20,92	0,06983
14,76	164°	11,49	22,76	0,06351
15,95	162°	12,60	24,89	0,05750
17,32	160°	13,87	27,32	0,05190
18,90	158°	15,37	30,17	0,04655
20,77	156°	17,15	33,55	0,04149
23,00	154°	19,28	37,57	0,03671
25,71	152°	21,90	42,50	0,03217
29,08	150°	25,16	48,60	0,02788
33,37	148°	29,36	56,45	0,02380
39,05	146°	34,93	66,81	0,01994
46,88	144°	42,66	81,15	0,01628
58,45	142°	54,12	102,34	0,01281
77,17	140°	72,72	136,67	0,00951
112,83	138°	108,27	202,16	0,00638
206,68	136°	201,97	374,53	0,00342
1 163,09	134°	1158,28	2132,39	0,00060
∞	133°34′	∞	∞	0

Dès lors, et sous la seule condition que son volume soit minimum, le calcul d'un anneau s'effectue facilement, à l'aide du tableau VI. Il suffit de connaître la valeur de $\frac{k}{p_e}$ pour avoir,

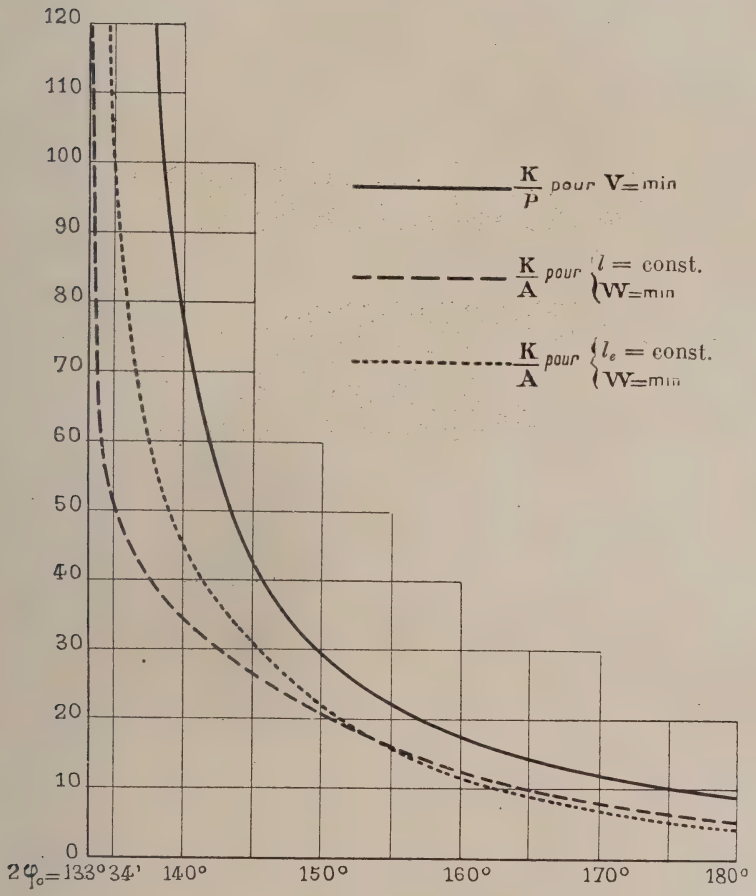


Fig. 8

en regard, la valeur optima de l'amplitude, ainsi que l'épaisseur de la voûte et le volume qui lui correspondent. Pour des valeurs intermédiaires une interpolation suffit.

Le seul examen du tableau VI et du graphique correspondant

(fig. 8, courbe en trait plein) montre que pour des valeurs très grandes de $\frac{k}{p_e}$, c'est-à-dire pour des profondeurs très petites, l'amplitude la plus indiquée se rapproche asymptotiquement d'un angle de 133°34′, caractéristique des arcs indéformables de volume minimum. Au contraire, pour les plus faibles valeurs de $\frac{k}{p_e}$, c'est-à-dire pour les plus grandes profondeurs, l'amplitude optima augmente jusqu'à devenir la caractéristique de l'arc en plein cintre pour $\frac{k}{p_e} \leqslant 8{,}92$. Enfin, si x représente la profondeur de l'anneau de voûte, mesurée au dessous de la retenue normale (1), la profondeur limite, au delà de laquelle il convient toujours d'adopter le plein cintre est, pour les diverses valeurs de k :

$$x = 0{,}112 . k$$

k exprimé en kilogr./cmq et x en mètres, la formule devient :

$$x = 1{,}12\ k$$

soit, sensiblement :

$$x = k.$$

D'où la règle pratique suivante, qui a l'avantage d'être très mnémotechnique :

La profondeur au delà de laquelle le plein cintre représente toujours l'amplitude optima est grossièrement représentée par le nombre qui exprime, en kilogs par centimètre carré, la charge de sécurité du matériau constitutif de l'ouvrage.

Remarquant que la courbe de la figure 8 se rapproche significativement d'une hyperbole, avec la méthode d'approximation déjà indiquée, M. Ippolito donne à l'équation (10_A) la forme très simple :

$$(11_A) \qquad \left(\frac{k}{p_e} + 2{,}28\right) \times (\varphi_0 - 66{,}77) = 259{,}5$$

(1) En supposant toujours la masse liquide avoir pour densité 1 *kg.* — soit une tonne par mètre cube —.

laquelle présente le grand avantage de se prêter facilement au calcul direct de φ_0 pour chaque valeur du rapport $\frac{k}{p_e}$ (1), en outre de ce qu'elle permet une approximation telle que dans les cas les plus défavorables les valeurs obtenues avec elle ne diffèrent jamais de plus de 3 minutes de celles calculées avec la formule (10_A).

Il s'ensuit qu'au point de vue pratique — le seul intéressant, en définitive — le problème de l'anneau de voûte de volume (et, par suite, de dépense) minimum peut être considéré comme résolu, à l'aide des formules ci-dessous, groupées à dessein pour la commodité de nos lecteurs :

$$(6_A) \qquad \frac{k}{p_e} = \eta + \frac{563{,}69}{\varphi_0} - 3{,}60$$

$$(11_A) \qquad \left(\frac{k}{p_e} + 2{,}28\right) \times (\varphi_0 - 66{,}77) = 259{,}5$$

$$(12_A) \qquad \begin{cases} r = \dfrac{l}{2 \sin \varphi_0}; \\ h = \dfrac{l}{2\,\eta \,.\, \sin \varphi_0}; \\ V = \dfrac{0{,}01745\,.\,\varphi_0}{2\,\eta \sin^2 \varphi_0}\, l^2 \ (2). \end{cases}$$

---

(1) Dans cette équation (11_A) les amplitudes $2\,\varphi_0$ sont exprimées en degrés sexagésimaux, pour faciliter les calculs.

(2) **Application numérique.** — Soit, par exemple, à calculer un anneau de barrage en arc situé à une profondeur de 15 mètres en-dessous de la retenue normale et ayant une amplitude donnée : $2\,\varphi_0 = 150°$ (exemple choisi, intentionnellement dans Guidi, déjà cité). Si l'on admet comme charge de sécurité le travail maximum $\sigma_i' = k = 247$ *tonn./m²*, c'est-à-dire la valeur trouvée par Guidi pour $\frac{r}{h} = 12{,}50$, on trouve, au moyen de la formule (6_A), $\frac{r}{k} = 12{,}55$, ceci avec une erreur de seulement 0,5 % sur la valeur exacte, et avec l'avantage du calcul direct et rapide. Si l'on assigne à la corde une longueur : $l = 20$ mètres, le volume de l'anneau de voûte sera :

$$V = \frac{20^2 \times 0{,}01745 \times 75}{2 \times 1250 \times 0{,}966^2} = 22{,}449\ m^3$$

et son épaisseur :

$$h = \frac{20}{2 \times 12{,}50 \times 0{,}966} = 0{,}83\ m.$$

Barrages en arc de volume total minimum. — La méthode indiquée pour déterminer la condition d'économie maximum d'un anneau de voûte, ne résout pas, toutefois, le problème

---

Si, au lieu de se donner *a priori* la valeur de $2\varphi_0$, on préférait la déterminer avec la formule (11_A) on aurait :

$$2\varphi_0 = \frac{2 \times 259{,}5}{\frac{247}{15} + 2{,}28} + 2 \times 66{,}77 = 161°02'$$

et successivement :

$$\eta = \frac{247}{15} - \frac{563{,}69}{161{,}2} + 3{,}60 = 13{,}07$$

$$h = \frac{20}{2 \times 13{,}07 \times 0{,}966} = 0{,}78\ m.$$

$$V = \frac{\overline{20^2} \times 0{,}01745 \times 80{,}6}{2 \times 13{,}07 \times \overline{0{,}986^2}} = 22{,}121\ m^3.$$

La différence, très petite, entre ce volume minimum et celui déjà calculé montre que l'amplitude de 150, fixée par Guidi, était bien choisie, et que des variations, même assez sensibles, dans l'amplitude, n'ont qu'une conséquence insignifiante sur l'économie générale de l'ouvrage.

Toutefois, pour caractéristiques qu'ils soient, ces résultats n'autorisent pas à négliger le calcul direct — toujours opportun — de la dépense minima.

Si en effet, dans l'exemple ci-dessus, on avait avec moins de doigté, assigné à l'amplitude $2\varphi_0$ la valeur, $2\varphi_0 = 140°$, on aurait eu :

$$V = 23{,}02\ m^3$$

avec une différence de + 5 %; et, si l'on avait supposé $2\varphi_0 = 120°$, on aurait eu :

$$V = 26{,}15\ m^3$$

avec une différence de + 20 % environ.

En somme, les variations de volume constatées ne sont pas énormes, même pour de très appréciables différences dans la variation de l'amplitude; mais il est, toutefois, à remarquer qu'elles croissent avec la profondeur de l'anneau en dessous du niveau de retenue normale. Par exemple, si, dans l'application numérique ci-dessus, on suppose la profondeur de 25 *m.*, on a :

$$\frac{k}{p_e} = \frac{247}{25} = 9{,}88;$$

par des calculs très simples, on trouve :

Pour $2\varphi_0 = 150°$ $\quad V = 47{,}05\ mc.$
— $2\varphi_0 = 161°{,}2$ $\quad V = 44{,}62$ —
— $2\varphi_0 = 140°$ $\quad V = 50{,}96$ —;

et entre ces volumes et le volume exact, calculé plus haut, les différences qui, dans l'exemple précédent, étaient de 1 à 5 %, s'élevant respectivement à 5,5 % et à 8,5 %, croissent encore si on les rapporte à l'arc de volume minimum, auquel (formule (11_A) correspondent une amplitude

$$2\varphi_0 = 176°$$

et un volume

$$V = 43{,}44\ mc.$$

plus général, de l'économie maximum pour l'ensemble de l'ouvrage.

En effet, si l'on appliquait servilement la méthode susindiquée aux anneaux successifs d'un même barrage en arc, l'amplitude optima variant avec la profondeur, on serait conduit à concevoir une superposition d'anneaux d'amplitudes très différentes les unes des autres et qui iraient croissant entre un minimum pour l'anneau supérieur et un maximum pour l'anneau de base.

Les parements d'un tel ouvrage seraient constitués exclusivement par des surfaces gauches d'un tracé très difficile, indépendamment de ce que l'extrados, les anneaux supérieurs, surplomberait leurs inférieurs, ce qui est inadmissible.

Dans les ouvrages à arche unique, barrant une gorge très étroite au fond, et dont les parois sont plus ou moins déclives, il est même très difficile de trouver une amplitude optima qui se puisse maintenir constante pour tous les anneaux, en raison de l'étranglement de la vallée au fond du thalweg; si, parfois, une structure de ce genre a pu être réalisée, cela n'a jamais été possible qu'avec une amplitude très inférieure à celle correspondant aux minima de volume et constitue, de toute manière, une exception très rare à la règle générale.

Les seuls ouvrages — à notre connaissance — dans lesquels cette condition est réalisée sont ceux de Manille (Philippines) (1), de Salmon-Creek, en Alaska et de Lake Spaulding, en Californie, ces 2 derniers, œuvres du professeur Jorgensen, et

---

Enfin, si l'on envisage une nouvelle amplitude de 120°, s'éloignant encore davantage de l'amplitude optima de 176°, on a :

$$2\varphi_0 = 120^\circ \text{ et } V = 68{,}25 \ mc.$$

D'où l'on peut conclure que, même pour de grandes profondeurs, les différences par rapport au volume minimum sont encore très faibles si les variations d'amplitude ne dépassent pas 10 ÷ 20 degrés, mais qu'elles croissent ensuite très rapidement jusqu'à atteindre alors des pourcentages considérables qui, dans l'exemple ci-dessus atteignent 16 % pour $2\varphi_0 = 140^\circ$, et même 58 % pour $2\varphi_0 = 120^\circ$.

(1) Voir « *Engineering New Record* », 23 août 1913.

constitués par une série d'anneaux superposés d'une amplitude uniforme de 120° (1).

Toutefois, il n'est pas téméraire d'envisager des progrès rapides dans ce genre de constructions, spécialement avec l'emploi du béton armé, en raison de la souplesse, très remarquable, de ce matériau.

En dehors de ces cas exceptionnels, les types d'ouvrages qu'on peut pratiquement adopter sont caractérisés par la constance, sur toute la hauteur du barrage, du rayon de courbure de l'arc, et, plus précisément encore, de celui de la fibre moyenne de chaque anneau, si la section transversale de l'ouvrage est à parements symétriques; de l'extrados, si le parement amont est vertical.

Encore importe-t-il de distinguer entre les barrages en arc, selon la longueur de la corde, laquelle peut être constante dans les arcs barrant des gorges à parois presque verticales ou bien décroissante avec la profondeur dans les ouvrages, généralement à arches multiples, barrant des vallées plus ou moins évasées, rétrécies seulement vers le thalweg.

Examinant successivement ces deux hypothèses M. Ippolito s'ingénie, comme toujours, à établir des formules simples, donnant directement le volume de chaque anneau de voûte. Il y parvient de la façon suivante :

Volume élémentaire des anneaux de voûte dans un barrage en arc à corde constante. — Dans ces ouvrages la corde, le rayon de courbure (moyen ou de l'extrados) et l'amplitude $2\varphi_0$ sont trois quantités invariables. Soit W le volume total du barrage compris entre le niveau des plus hautes eaux et le socle de fondations, et V le volume élémentaire d'un anneau de voûte de hauteur unitaire, dont le plan moyen soit à une profondeur (x) sous la retenue maximum.

---

(1) Jorgensen, comme on l'a vu, préconise l'amplitude de 133°, ou encore celle de 120°, comme la plus convenable, et bien moindre que celle correspondant au volume minimum.

On a évidemment :

$$W = \int_0^A V dx.$$

(A) représentant, dans cette formule, la hauteur du barrage. Le volume de l'anneau circulaire est, comme on a déja vu :

$$V = \frac{l^2}{2} \times \frac{\varphi_0}{\sin^2 \varphi_0} \times \frac{h}{r}$$

D'autre part, l'équation $(6'_A)$ nous donne :

$$\frac{h}{r} = \frac{1}{\eta} = \frac{1}{\frac{k}{x} - \frac{9{,}833}{\varphi_0} + 3{,}60}$$

ayant substitué (x) à p, en raison de ce que les deux quantités sont exprimées par le même nombre si p, représente des tonnes par mètre carré et x des mètres linéaires, φ_0 étant toujours exprimé en radians. En substituant, on a :

$$V = \frac{l^2}{2} \times \frac{1}{\frac{k}{x} - \frac{9{,}833}{\varphi_0} + 3{,}60} \times \frac{\varphi_0}{\sin^2 \varphi_0} \qquad (13_A).$$

Intégrant cette expression entre les limites $x = 0$ et $x = A$, pour obtenir W en fonction de φ_0 (k et l étant des données), l'équation

$$\frac{dW}{d\varphi_0} = 0$$

fournirait ensuite la valeur optima de φ_0 pour une corde donnée et pour chaque combinaison des valeurs de (k) (l) et (A). Il est clair que, puisque (V) et (l^2) sont proportionnels, cette valeur de (φ_0) est indépendante de (l) mais dépend seulement de (k) et de (A).

Malheureusement le procédé ci-dessus indiqué aboutit à des formules très compliquées et bien peu maniables.

Étant donné que, par ailleurs, l'équation $(6'_A)$ qui est la base de tout le calcul n'est point l'exacte équation du problème, mais seulement une équation approchée, il n'y a aucune raison particulière pour s'y attacher plutôt qu'à toute autre expression qui semblerait plus apte à la résolution du

problème pourvu qu'elle soit d'un degré d'approximation au moins égal.

Or, la formule (13_A) montre que :

$$\frac{V}{l^2} = f\left(\frac{p_e}{k}, \varphi_0\right).$$

Développant en série cette fonction d'après les puissances de $\frac{p_e}{k}$, et retenant seulement les 3 premiers termes, nous aurons :

$$\frac{V}{l^2} = c + \alpha\frac{p_e}{k} + \beta\left(\frac{p_e}{k}\right)^2;$$

et, puisque dans le barrage de profil théorique on a, au sommet (c'est-à-dire pour $p_e = 0$), une épaisseur et par conséquent un volume nuls, le coefficient c est nul aussi.

Par suite :

$$\frac{V}{l^2} = \alpha\frac{p_e}{k} + \beta\left(\frac{p_e}{k}\right)^2 \qquad (14_A)$$

où α et β sont considérés comme des fonctions du seul φ_0. D'autre part pour chaque valeur de φ_0 il est facile de calculer directement les valeurs de :

$$\frac{V}{l^2} = \frac{\varphi_0}{2\sin^2\varphi_0} \times \frac{1}{\eta},$$

étant donné qu'on a déjà calculé les valeurs de η pour différentes valeurs de $\frac{p_e}{k}$ (tableau IV). En considérant les valeurs du tableau IV comme les points repérés d'une fonctions expérimentale qu'on désire mettre sous la forme (14_A), on peut donc déterminer les valeurs de (α) et de (β) par la méthode des moindres carrés.

Soit (ε) l'erreur qu'on commettrait si les volumes étaient calculés avec la formule (14_A) :

$$\varepsilon = \frac{V}{l^2} - \alpha\frac{p_e}{k} - \beta\left(\frac{p_e}{k}\right)^2,$$

les valeurs de $\frac{p_e}{k}$ et de $\frac{V}{l^2}$ étant celles calculées directement et

reportées dans le tableau IV. Étant, toutefois, préférable d'opérer sur l'erreur relative :

$$\chi = \frac{\varepsilon}{\frac{V}{l^2}} = 1 - \alpha \frac{\frac{p_e}{k}}{\frac{V}{l^2}} - \beta \frac{\left(\frac{p_e}{k}\right)^2}{\frac{V}{l^2}}$$

les valeurs de (α) et (β) rendant minimum la somme des carrés des erreurs relatives (χ), sont données par les équations :

$$\sum \frac{\frac{p_e}{k}}{\frac{V}{l^2}} - \alpha \sum \frac{\left(\frac{p_e}{k}\right)^2}{\left(\frac{V}{l^2}\right)^2} - \beta \sum \frac{\left(\frac{p_e}{k}\right)^3}{\left(\frac{V}{l^2}\right)^2} = 0$$

$$\sum \frac{\left(\frac{p_e}{k}\right)^2}{\frac{V}{l^2}} - \alpha \sum \frac{\left(\frac{p_e}{k}\right)^3}{\left(\frac{V}{l^2}\right)^2} - \beta \sum \frac{\left(\frac{p_e}{k}\right)^4}{\left(\frac{V}{l^2}\right)^2} = 0$$

Quoique un peu laborieux, le calcul est très simple et ne demande pas, du reste, à être poussé très loin. M. Ippolito a borné ses calculs aux valeurs usuelles de $\frac{p_e}{k}$ qui se rencontrent le plus souvent dans la pratique; c'est-à-dire à celles comprises entre 0,20 et 0,05, lesquelles correspondent évidemment aux valeurs de 5 à 20 pour $\frac{k}{p_e}$. Les valeurs de (α) et de (β) sont réunies dans le tableau VII ci-après avec celles des erreurs relatives (χ) résultant du calcul. La seule consultation de ce tableau atteste que la valeur maximum des erreurs relatives ressort, pour $2\varphi_0 = 180^o$, à seulement 1,5 %; et, de toute évidence, l'adoption de la formule approchée (14_A) se trouve parfaitement justifiée. Au moyen du tableau VII, et par le même procédé, on peut déterminer les expressions de (α) et β), en fonction de (φ_0). Posant, en effet :

$$\alpha = a + b\varphi_0 + c\varphi_0^2$$

les valeurs de a, b, c qui rendent minimum la somme des erreurs, sont déterminées par le système d'équations :

$$\begin{aligned} 7\,a + b\Sigma\varphi_0 + c\Sigma\varphi_0^2 &= \Sigma\alpha \\ a\Sigma\varphi_0 + b\Sigma\varphi_0^2 + c\Sigma\varphi_0^3 &= \Sigma\alpha\varphi_0 \\ a\Sigma\varphi_0^2 + b\Sigma\varphi_0^3 + c\Sigma\varphi_0^4 &= \Sigma\alpha\varphi_0^2. \end{aligned}$$

Tableau VII.

$2\,\varphi_0$	α	β	χ
180°	0,7215	3,6494	1,15 %
170°	0,6732	4,1176	1,24 —
160°	0,6342	4,7155	1,32 —
150°	0,6025	5,5115	1,42 —
140°	0,5768	6,5357	1,36 —
130°	0,5573	7,8908	1,17 —
120°	0,5454	9,6647	0,95 —

Et un système d'équations semblables permettrait le calcul de (β) en fonction de (φ_0). Toutes opérations effectuées, et après avoir substitué les valeurs de α et de β dans (14_A), on obtient l'expression finale :

$$\frac{V}{l^2} = (0{,}94151 - 0{,}0148885\,.\,\varphi_0 + 0{,}00013816\,.\,\varphi_0^2)\,\frac{p_e}{k} + (51{,}6581 - 1{,}03614\,.\,\varphi_0 + 0{,}00560074\,.\,\varphi_0^2)\left(\frac{p_e}{k}\right)^2 \qquad (15_A)$$

exprimant la valeur de $\frac{V}{l^2}$ en fonction de φ_0 et de $\frac{p_e}{k}$, et dans laquelle φ_0 représente des degrés sexagésimaux. Les valeurs données par cette formule sont d'une approximation demeurant toujours dans les limites admises, avec un écart généralement inférieur à 2 %, et qui ne croît jamais jusqu'à 2,5 %. Elle présente, par suite, le même degré d'approximation que la formule (6_A), mais elle a, sur cette dernière, l'avantage de se prêter plus facilement à l'intégration.

3. — Économie maximum dans un barrage a profil symétrique et de corde constante.

Intégrons la formule ci-dessus, en appelant (A) la hauteur totale et (L) la largeur, constante, de l'ouvrage; on a :

$$\frac{W}{L^2} = \int_0^A \left[\alpha\frac{x}{k} + \beta\left(\frac{x}{k}\right)^2\right] dx = \frac{A^2}{k}\left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{3}\beta\,.\,\frac{A}{k}\right)$$

d'où l'on tire :

$$\frac{W}{AL^2} = \frac{A}{k}\left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{3}\beta\frac{A}{k}\right) \qquad (16_A).$$

A l'aide de cette formule on peut, pour chaque système de valeurs de A, k, L, calculer la valeur de W ou de $\frac{W}{AL^2}$ en fonction des diverses valeurs de φ_0. Il suffit, pour cela, de remplacer α et β par les expressions entre parenthèses de la formule (15A); et, par quelques calculs numériques, il devient facile d'établir pour quelle valeur de φ_0 le volume total W du barrage serait minimum.

On peut, toutefois, procéder d'une manière générale, en dérivant par rapport à φ_0 la fonction (16_A) et en égalant cette dérivée à zéro; soit :

$$\frac{1}{AL^2} \times \frac{dW}{d\varphi_0} = \frac{A}{k}\left(\frac{1}{2}\frac{d\alpha}{d\varphi_0} + \frac{1}{3}\frac{d\beta}{d\varphi_0} \times \frac{A}{k}\right) = 0$$

d'où :

$$\frac{A}{k} = -\frac{3}{2} \times \frac{\frac{d\alpha}{d\varphi_0}}{\frac{d\beta}{d\varphi_0}}$$

Les valeurs des dérivées $\frac{d\alpha}{d\varphi_0}$ et $\frac{d\beta}{d\varphi_0}$ peuvent s'obtenir en dérivant les expressions de (α) et (β) qui figurent entre parenthèses dans la formule (15_A), mais on obtient, pourtant, des résultats plus approchés par dérivation graphique des courbes de (α) et (β) en fonction de φ_0, préalablement dessinées à l'aide des données du tableau ci-dessus. Ainsi obtenues, les valeurs de $\frac{k}{A}$ correspondant aux valeurs les plus usuelles de $2\,\varphi_0$, pour lesquelles le volume total du barrage est minimum, sont consignées dans le tableau VIII ci-après :

Tableau VIII.

$2\varphi_0$	133°34′	135°	140°	150°	160°	170°	180°
$\frac{k}{A}$	∞	54,29	34,11	20,99	12,49	8,21	5,36

Avec ces valeurs, on a tracé, sur la figure 8, la courbe tiretée, à allure nettement hyperbolique, et en raison de laquelle allure on peut exprimer la relation existant entre $\frac{k}{A}$ et $2\varphi_0$ au moyen d'une expression de la forme (11_A) et dans laquelle les coefficients numériques seraient déterminés par la méthode précédente.

On a ainsi :

$$\left(\frac{k}{A} + 8{,}787\right) \times (2\varphi_0 - 120°{,}317) = 844{,}33 \quad (17_A)$$

formule qui donne, pratiquement, des erreurs toujours inférieures à 2 ou 3 degrés, sans influence — ainsi qu'on l'a vu — sur le volume total du barrage.

4. — Économie maximum dans un barrage a parement amont vertical, et de corde constante.

Le procédé suivi pour le profil symétrique est encore applicable ici : la corde constante étant celle de l'arc extradossal (l_e).

On a évidemment :

$$\frac{l_e}{l} = \frac{r + \frac{h}{2}}{r} = 1 + \frac{1}{2\eta}$$

et par suite :

$$\frac{V}{l_e^2} = \frac{V}{l^2} \times \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2\eta}\right)^2}$$

Il suffit donc de multiplier les valeurs de $\frac{V}{l^2}$, données par le tableau IV (page 53), par les valeurs respectives de $\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2\eta}\right)^2}$, et d'opérer sur les termes $\left(\frac{V}{l_e^2}\right)$ ainsi obtenus comme on l'a fait au paragraphe précédent pour avoir les coefficients (α') et (β') de l'expression :

$$\frac{V}{l_e^2} = \alpha' \frac{p_e}{k} + \beta' \left(\frac{p_e}{k}\right)^2$$

Ces valeurs de (α') et (β') sont groupées dans le tableau suivant :

Tableau IX.

$2\varphi_0$	α'	β'
180°	0,7700	1,7451
170°	0,7276	2,1000
160°	0,6930	2,5733
150°	0,6667	3,1799
140°	0,6499	3,9243
130°	0,6438	4,8527
120°	0,6525	6,0028

Calculant alors les valeurs de $\frac{d\alpha'}{d\varphi_0}$ et $\frac{d\beta'}{d\varphi_0}$, on obtient les valeurs respectives de k et de $2\varphi_0$, pour lesquelles le volume total du barrage est minimum. Elles sont rapportées ci-dessous :

Tableau X.

$2\varphi_0$	133°34′	135°	140°	150°	160°	170°	180°
$\frac{k}{A}$	∞	101,90	45,00	22,13	11,89	7,36	4,27

La courbe représentative est dessinée en traits ponctués, sur la figure 8; et la fonction établissant le rapport entre $\frac{k}{A}$ et $2\varphi_0$ peut être représentée par la formule :

$$(18_A) \qquad \left(\frac{k}{A} + 7{,}906\right)(2\varphi_0 - 128^o{,}042) = 632{,}64$$

semblable à la formule (17_A) et plus exacte même que cette dernière, parce qu'elle donne, par rapport à elle, des erreurs toujours inférieures à un degré dans l'amplitude.

5. — Comparaison entre les deux types d'ouvrages étudiés ci-dessus.

Les formules (17^A) et (18_A) permettent, comme on l'a vu, de calculer l'amplitude optima pour un ouvrage donné, amplitude qui est, d'ailleurs, indépendante de la corde (corde moyenne ou corde d'extrados) de l'arc.

Une fois établie l'amplitude $2\varphi_0$ on peut, soit à l'aide de la formule (6_A) soit avec la construction graphique indiquée au paragr. 4, tracer le profil transversal du barrage.

De l'examen des 3 courbes ainsi tracées sur la fig. 8, et qui correspondent tant au cas d'un anneau de voûte qu'à ceux de l'ensemble de l'ouvrage pour un barrage à parements symétriques ou à paroi amont verticale, on déduit aisément :

a) Que (ce qui est d'ailleurs évident), l'amplitude qui convient le mieux pour un barrage donné est toujours inférieure à celle qui convient à l'anneau inférieur, considéré séparément et supérieure à celle de 133° 34′, qui convient à l'anneau supérieur;

b) Que pour une même valeur de $\frac{k}{A}$ et à la condition qu'elle soit comprise dans les limites de la pratique, soit entre 5 et 40, l'amplitude qui convient le mieux pour un barrage à profil symétrique est plus grande que celle qui convient au

barrage à parement amont vertical, toutes les fois que l'on a : $\frac{k}{A} < 15{,}55$; et inversement aussi, lorsque $\frac{k}{A} > 15{,}55$.

Dans le cas où $\frac{k}{A} = 15{,}55$, l'amplitude optima, commune aux deux types d'ouvrages, est de 155°;

c) Que, pour la même valeur de $\frac{k}{A}$, les amplitudes correspondantes dans les deux types d'ouvrages diffèrent assez peu, et, en tous cas, d'une quantité qui est sans influence appréciable sur le volume total du barrage.

Supposons, par exemple, que, pour une valeur donnée de $\frac{k}{A}$, la même amplitude puisse également convenir aux deux types. Le volume total serait donné par l'une des deux formules :

$$W = Al^2\left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{3}\beta\frac{A}{k}\right)\frac{A}{k}$$

$$W_e = Al_e^2\left(\frac{1}{2}\alpha' + \frac{1}{3}\beta'\frac{A}{k}\right)\frac{A}{k}$$

dans lesquelles les valeurs de (α), (β) et (α'), (β') sont rapportées à une même amplitude $2\varphi_0$.

D'autre part :

$$l_e = \left(1 + \frac{1}{2\eta}\right) l$$

η étant calculé, pour l'anneau inférieur. On aura alors :

$$W_e \leqslant W$$

et, suivant qu'il aura lieu ou non, l'inégalité :

$$(19_A) \qquad \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{3}\beta\frac{A}{k} \leqslant \left(\frac{1}{2}\alpha' + \frac{1}{3}\beta'\frac{A}{k}\right)\left(1 + \frac{1}{2\eta}\right)^2$$

Inégalité d'un critérium certain pour choisir selon la convenance économique à intervenir, le type du profil transversal du barrage optima. Il suffit de substituer à η sa valeur, tirée de (5_A) ou (6_A), pour que la formule (19_A) soit fonction exclusive de $\frac{A}{k}$ et de φ_0.

Il est ordinairement facile de constater qu'en général :

$$W_e > W.$$

Si, par exemple, $\frac{k}{A} = 22$, auquel correspond l'angle optima de $2\varphi_0 = 150^\circ$, et par suite, $\eta = 18$, l'équation (19_A) montre, que W_e est plus grand que W, présentant, par rapport à ce dernier, une valeur supérieure de 5,7 %.

Par contre, si l'on avait $\frac{k}{A} = 8$ correspondant à $2\varphi_0 = 170^\circ$ environ et $\eta = 4{,}79$, W_e serait supérieur à W d'environ 7,5 %.

Ces deux exemples représentent sensiblement les limites pratiques des valeurs de $\frac{k}{A}$, et l'on peut, par suite, en conclure que le barrage à parement amont vertical est toujours plus lourd que celui à parements symétriques, avec, en faveur de ce dernier, une différence de 6 ÷ 7 %.

Du reste, cette constatation se déduit aisément de la construction indiquée au paragraphe 4, en remarquant que l'aire de la section transversale est la même dans les deux cas, alors que le rayon de l'arc décrit par le centre de gravité de cette section est plus grand dans l'ouvrage à parement amont vertical (1).

---

(1) Toutefois, il est bon de rappeler que ce résultat s'obtient en négligeant, dans le barrage à profil symétrique, la composante verticale de la pression hydrostatique, laquelle est d'ailleurs très faible, dans la plupart des cas. On peut, du reste, la calculer préalablement, remarquant que la poussée fait, avec l'horizontale, un angle α donné par :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{d\frac{h}{2}}{dx},$$

et, par suite, en dérivant la formule (9_A) :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{r}{k}}{2\left(1 - \frac{a}{k}x\right)^2}$$

Si, exceptionnellement, la valeur de α, pour la profondeur maxima, était trop forte pour pouvoir être considérée comme négligeable, il conviendrait,

Enfin, le barrage à profil symétrique présente encore un avantage incontestable en ce qui touche au poids propre de l'ouvrage, puisque, dans chaque section horizontale, la sollicitation demeure baricentrique, alors que, dans l'ouvrage à parement amont vertical, la résultante des pressions est excentrique et détermine un effort de compression supérieur sur l'arête amont que sur son opposée.

Cet avantage est pourtant d'ordre secondaire dans les barrages construits en béton de ciment, vu la grande résistance de ce matériau à la compression (1).

Calcul des barrages en arc, à corde variable. — On ne peut, malheureusement pas, calculer les barrages à corde variable et de moindre volume avec les mêmes procédés généraux qu'on a pu adopter pour les barrages à corde constante. Et cependant, les ouvrages dans lesquels la corde varie avec la hauteur sont encore les plus nombreux; on peut même dire les seuls à envisager lorsqu'il s'agit de barrer une gorge étroite et profonde avec une arche unique.

Dans ces voûtes, l'élément qui demeure invariable est le rayon d'extrados, ou bien le rayon moyen de chaque anneau, tandis que la corde varie avec la section d'implantation, qui peut être très différente d'un cas à l'autre et qui, en général, ne peut pas être représentée par une fonction analytique d'un type donné et suffisamment simple.

Puisque la section d'implantation dans la gorge est presque toujours notablement plus étroite dans le fond, il s'ensuit que, même si les anneaux supérieurs ont une grande amplitude, leurs inférieurs présentent obligatoirement une amplitude très

---

évidemment, d'en tenir compte, ou, préférablement encore, de recourir au barrage à parement amont vertical.

(1) En conséquence, si l'on suppose, à l'avantage de la stabilité, que l'ouvrage ait une épaisseur constante, sa hauteur doit être telle que : $A = \frac{k}{\gamma}$ (γ étant la densité de sa structure).

Cette relation est, en général, toujours vérifiée.

petite, le plus souvent inférieure à la limite de 133°34′, déterminée, plus haut, comme étant l'amplitude optima qui convient pour les anneaux indéformables.

D'autre part, le tableau IV (page 53), montre que pour une même valeur donnée de $\frac{p_e}{k}$, c'est-à-dire pour une profondeur déterminée, l'épaisseur (h) (avec le rayon (r) constant) croît au fur et à mesure que décroît l'amplitude, de telle sorte que pour les très faibles amplitudes correspondant à de grandes profondeurs, il peut arriver que la valeur de η tombe au-dessous de la valeur limite $\eta = 5$, jusqu'ici admise. Sur la base de ces critériums, et dans l'intention de donner une plus grande extension au tableau IV, M. Ippolito a calculé, à l'aide des formules initiales (2_A). (3_A) et (4_A), les valeurs de $\frac{k}{p_e}$, pour des valeurs de η variant entre 2 et 20, et de $2\varphi_0$ variant entre 120_0 et 10_0.

Les résultats numériques sont consignés dans le tableau suivant (XI), qui n'est autre chose qu'un complément du tableau IV.

TABLEAU XI.

$2\varphi_0$	$\eta = \frac{r}{h}$	$\frac{k}{p_e}$	$\frac{p_e}{k}$	$\frac{V}{l^2}$	$\frac{V}{r^2}$	$\frac{V}{r_e^2}$
110°	2	5,08	0,1967	0,3576	0,9599	0,6143
	3	7,56	0,1323	0,2384	0,6400	0,4701
	4	9,56	0,1047	0,1788	0,4800	0,3792
	5	11,20	0,0893	0,1430	0,3840	0,3174
	7,5	14,51	0,0689	0,0954	0,2559	0,2249
	10	17,35	0,0577	0,0715	0,1920	0,1742
	15	22,53	0,0444	0,0477	0,1280	0,1198
	20	27,68	0,0361	0,0358	0,0960	0,0914
100°	2	4,89	0,2044	0,3718	0,8727	0,5585
	3	7,58	0,1319	0,2478	0,5818	0,4274
	4	9,86	0,1014	0,1859	0,4363	0,3447
	5	11,76	0,0850	0,1487	0,3491	0,2885
	7,5	15,48	0,0646	0,0991	0,2327	0,2045
	10	18,53	0,0540	0,0744	0,1745	0,1583
	15	24,02	0,0416	0,0496	0,1163	0,1088
	20	29,12	0,0343	0,0372	0,0873	0,0831
90°	2	4,59	0,2178	0,3927	0,7854	0,5027
	3	7,47	0,1339	0,2618	0,5236	0,3846
	4	10,08	0,0992	0,1964	0,3927	0,3103
	5	12,34	0,0811	0,1571	0,3142	0,2597
	7,5	16,73	0,0598	0,1047	0,2094	0,1840
	10	20,16	0,0496	0,0785	0,1571	0,1425
	15	25,93	0,0386	0,0523	0,1047	0,0980
	20	31,26	0,0320	0,0393	0,0785	0,0747
70°	2	3,56	0,2813	0,4642	0,6109	0,3910
	3	6,33	0,1581	0,3094	0,4072	0,2991
	4	9,31	0,1074	0,2321	0,3054	0,2413
	5	12,24	0,0817	0,1857	0,2443	0,2019
	7,5	18,59	0,0538	0,1238	0,1629	0,1432
	10	23,56	0,0424	0,0928	0,1222	0,1108
	15	31,68	0,0316	0,0619	0,0815	0,0763
	20	37,27	0,0268	0,0464	0,0611	0,0582
50°	2	2,17	0,4613	0,6109	0,4363	0,2792
	3	4,11	0,2435	0,4072	0,2909	0,2137
	4	6,53	0,1531	0,3054	0,2182	0,1724
	5	9,32	0,1073	0,2443	0,1745	0,1442
	7,5	17,09	0,0585	0,1629	0,1164	0,1023
	10	24,89	0,0402	0,1222	0,0873	0,0792
	15	35,73	0,0280	0,0815	0,0582	0,0545
	20	48,48	0,0206	0,0611	0,0436	0,0415
30°	2	0,87	1,1468	0,9769	0,2618	0,1676
	3	1,68	0,5967	0,6512	0,1745	0,1282
	4	2,75	0,3636	0,4884	0,1309	0,1034
	5	4,07	0,2459	0,3907	0,1047	0,0865
	7,5	8,36	0,1197	0,2605	0,0698	0,0613
	10	13,77	0,0726	0,1954	0,0524	0,0475
	15	26,51	0,0377	0,1307	0,0349	0,0327
	20	39,86	0,0287	0,0977	0,0262	0,0249
10°	2	0,10	9,7087	2,8685	0,0873	0,0559
	3	0,20	5,0251	1,9123	0,0582	0,0427
	4	0,32	3,1546	1,4342	0,0436	0,0345
	5	0,62	1,6181	1,1474	0,0349	0,0288
	7,5	1,00	0,9967	0,7649	0,0233	0,0205
	10	1,69	0,5936	0,5737	0,0175	0,0159
	15	3,75	0,2671	0,3827	0,0116	0,0109
	20	6,59	0,1517	0,2869	0,0087	0,0083
	40	25,55	0,0392	0,1435	0,0044	0,0043

Ainsi que nous l'avons prévu, pour les valeurs de $\frac{k}{p_e}$ plutôt faibles, la valeur correspondante de $\frac{r}{h}$ décroît, en correspondance avec l'amplitude; mais, au-dessous d'une certaine amplitude, caractéristique pour chaque $\frac{k}{p_e}$, cette valeur de $\frac{r}{h}$ augmente de nouveau.

Ainsi, par exemple, si $\frac{k}{p_e} = 7{,}5$, la valeur de $\frac{r}{h}$ est minimum, et sensiblement égale à 3, pour $2\varphi_0 = 100^\circ$; alors que pour $\frac{k}{p_e} = 10$, la valeur minimum de $\frac{r}{h}$ voisine avec 4, et se réalise pour $2\varphi_0 = 90^\circ$; ainsi, pour $\frac{k}{p_e} = 20$, $\frac{r}{h}$ devient minimum pour une amplitude comprise entre 50° et 30°.

Il y a lieu de remarquer, toutefois, que les résultats correspondant à des valeurs trop faibles de $\frac{r}{h}$, ne doivent pas être acceptés sans réserve étant donné que les formules servant à leur détermination envisagent seulement les arcs de faibles épaisseurs et à grands rayons de courbure.

Dans ces cas-là, il conviendrait d'avoir recours, pour les petites valeurs de $\frac{r}{h}$, aux formules des poutres courbes; mais on peut aussi adopter les formules usuelles, pourvu qu'on substitue (1) au moment d'inertie effectif de la section transversale :

$$I = \frac{1}{12} h^3 = 0{,}08333 . h^3$$

un moment d'inertie fictif :

$$I_1 = \frac{x}{(x+1)^2} r^2 h = \frac{12\, x\eta^2}{(x+1)^2} \times \frac{h^3}{12}$$

(1) Voir G. Albenga, *Contribution à la théorie des poutres à grande courbure* (Atti R. Acc. Scienze di Torino, 1909).

et au rayon r, un rayon fictif :

$$r_1 = \frac{1}{x+1} \times r$$

Dans ces formules l'anneau est supposé avoir une hauteur de un mètre, et le coefficient de forme (x) a, pour la section rectangulaire considérée, la valeur :

$$x = \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2r}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{h}{2r}\right)^4 + \frac{1}{7}\left(\frac{h}{2r}\right)^6 + \ldots\ldots$$

Limitant le développement aux trois premiers termes, nous aurons pour $\frac{r}{h} = 2; 3; 5$ les valeurs ci dessous :

Tableau XII.

$\frac{r}{h} =$	2	3	5
$x =$	0,02164	0,00941	0,00335
$\frac{12xr_1^2}{(x+1)^2} =$	0,99516	0,99744	0,99828
$\frac{1}{x+1} =$	0,9792	0,9907	0,9965

La consultation de ce tableau donne une idée fort approximative de l'erreur inhérente à l'adoption des formules jusqu'ici établies, lorsque $\frac{r}{h}$ devient très petit. On y voit que cette erreur, qui est de l'ordre de grandeur maximum de $2 \div 3$ %, si $\frac{r}{h} = 2$, est toujours inférieure à 1,5 %, si $\frac{r}{h} = 3$, et même inférieure à 0,5 % si $\frac{r}{h} = 5$.

Dans les limites d'approximation, adoptées par M. Ippolito, on peut estimer que les formules et leurs résultats numé-

riques ne sont à rejeter que lorsque la valeur de $\frac{r}{h}$ descend au-dessous de 3; ce qui arrive seulement dans quelques structures tout à fait exceptionnelles.

Le tableau XIII ci-après résume les différentes valeurs de $\frac{k}{p_e}$, déduites des tableaux précédents, nos IV et XI, que M. Ippolito a réunies dans le but de faciliter le calcul des ouvrages à arche unique.

L'usage de cette table est indiqué ci-après :

Sur un plan topographique et, autant que possible, à courbes de niveau, de la gorge à barrer, on établit, d'abord le tracé général de l'ouvrage, qui permet de déterminer immédiatement l'amplitude $(2\varphi_0)$ de l'anneau supérieur de l'ouvrage; et, en général, on cherche à donner à cette amplitude une valeur maximum, en raison de ce que, dans la plupart des cas, la nécessité de bien encastrer le barrage dans les rives de la gorge oblige à maintenir l'amplitude des anneaux supérieurs, au-dessous de la valeur qui correspondrait à la construction de cube minimum.

Les centres de courbure des anneaux superposés se trouvant sur une verticale dont on peut déterminer la projection sur le plan topographique, il devient, maintenant, très facile à l'aide d'un rapporteur, qu'on fait tourner en maintenant son centre fixé sur cette projection, de trouver les anneaux de voûte ayant des amplitudes $(2\varphi_0)$ qui correspondent à celle figurant dans le tableau XIII, comme aussi de relever la profondeur et par conséquent la pression (p_e) pour chacun de ces anneaux. On calculera ensuite les termes respectifs $\left(\frac{k}{p_e}\right)$ et, du tableau XIII, par une simple interpolation, on extraira les valeurs correspondantes de $\left(\frac{r}{h}\right)$.

Si le profil de l'ouvrage est symétrique, le calcul de l'épaisseur h est immédiat.

TABLEAU XIII.

Valeurs de $\frac{k.}{p_e}$

$\frac{r}{h}$	$2\varphi_0$													
	180°	170°	160°	150°	140°	130°	120°	110°	100°	90°	70°	50°	30°	10°
2								5,08	4,89	4,59	3,56	2,17	0,87	0,10
3								7,56	7,58	7,47	6,33	4,11	1,68	0,20
4								9,56	9,86	10,08	9,31	6,53	2,75	0,32
5	7,70	8,03	8,41	8,85	9,35	9,90	10,52	11,20	11,76	12,34	12,24	9,32	4,07	0,62
7,5	10,21	10,57	10,98	11,47	12,05	12,73	13,35	14,51	15,48	16,73	18,59	17,09	8,36	1,00
10	12,71	13,07	13,50	14,00	14,61	15,34	16,23	17,35	18,53	20,16	23,56	24,89	13,77	1,69
15	17,69	18,06	18,49	19,01	19,64	20,40	21,35	22,53	24,02	25,93	31,68	35,73	26,51	3,75
20	22,68	23,05	23,49	24,01	24,65	25,43	26,41	27,68	29,12	31,26	37,27	48,48	39,86	6,59
30	32,67	33,04	33,48	34,01	34,65	35,44	36,43							25,55
40	42,66	43,03	43,47	44,00	44,64	45,44	46,44							
60	62,66	63,02	63,46	63,99	64,63	65,43	66,44							
80	82,65	83,02	83,46	83,99	84,63	85,42	86,44							

Si, au contraire, le type d'ouvrage est à parement amont vertical, le rayon constant est celui de l'extrados :

$$r_e = r + \frac{h}{2}$$

d'où :

$$\frac{r_e}{h} = \frac{r}{h} + 0{,}50$$

donne la valeur de h, en augmentant de 0,50 la valeur de $\left(\frac{r}{h}\right)$ extraite du tableau XIII pour avoir le rapport $\left(\frac{h}{r_e}\right)$, dont le numérateur ($r_e$) est connu.

Étant donné qu'à une même valeur de $\left(\frac{r}{h}\right)$ correspondent des valeurs de $\left(\frac{k}{p_e}\right)$ qui, avec la diminution de $(2\varphi_0)$, croissent jusqu'à un maximum, pour redécroître ensuite (1) il peut advenir que, pour diverses raisons d'ordre topographique, un anneau de base exige une épaisseur moindre qu'un des anneaux supérieurs. Il va de soi qu'en ce cas on augmente l'épaisseur de l'anneau inférieur du barrage jusqu'à égaler au moins l'épaisseur de son anneau supérieur (1).

Application numérique. — Soit à établir dans une vallée, dont la fig. 9 représente le plan topographique, un barrage à arche unique devant relever le plan d'eau à l'altitude 160 *m*. Le resserrement de cette vallée conseille, *a priori*, le choix d'un barrage en arc, pourvu, toutefois, que les roches qui en constituent les rives soient capables d'en supporter la poussée.

Supposons qu'on ait choisi comme profil de cet ouvrage, le type à parement amont vertical. L'amplitude à donner à l'anneau supérieur est limitée par la nécessité qu'il y a à encastrer convenablement l'ouvrage dans les rives rocheuses

(1) Les valeurs maxima de $\left(\frac{k}{p_e}\right)$ pour chaque valeur de $\left(\frac{r}{k}\right)$ sont entourées d'un rectangle noir dans le tableau XIII.

de la vallée : il serait, par exemple, trop risqué d'envisager un seul instant l'adoption de l'arc $M_1 N_1 P_1$, d'amplitude 180° pour l'anneau supérieur : les poussées aux naissances n'intéresseraient pas toute la résistance des massifs de rives, mais

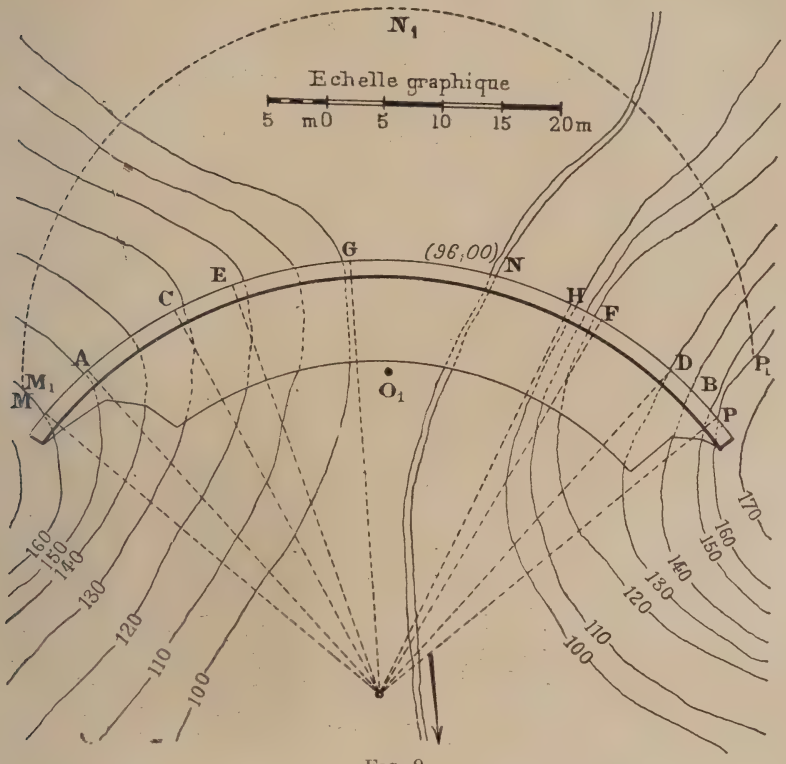


Fig. 9.

seulement celle des deux proéminences rocheuses qui, dès lors, deviendraient probablement insuffisantes. Cela ressort nettement de l'examen du plan topographique (fig. 9); et il convient, par suite, de choisir pour tracé de l'extrados de l'ouvrage, un arc MNP, d'amplitude inférieure à la 1/2 circonférence $M_1 N_1 P_1$, mais bien buté contre les flancs de la gorge (1).

(1) Pour souligner l'application du procédé, on a choisi intentionnellement un arc d'amplitude assez faible, alors qu'en pratique il convient généralement

Traçant les rayons OM et OP, on mesure l'angle MOP, voisin de 100°, et, moyennant quelques tâtonnements on détermine les arcs AB, CD, EF, GH, correspondant à des angles d'amplitudes respectives 90°, 70°, 50° et 30°, et présentant, cette particularité, que les extrémités de chacun d'eux se trouvent à la même altitude.

Relevées sur la fig. 9, ces altitudes, pour les arcs d'extrémités A et B, C et D, E et F, G et H, sont sensiblement de 149 *m.*; 131 *m.*; 121,50 *m.*; 99, 50 *m.*, correspondant à des profondeurs respectives, sous le niveau des plus hautes eaux, de 11 *m.*; 29 *m.*; 38,50 *m.* et 60,50 *m.* Si le barrage est prévu en béton de ciment, auquel on attribue une charge de sécurité : $k = 25$ *kgs/cmq* (soit 25 T. par m²), on aura, pour les quatre anneaux considérés, les valeurs de $\left(\frac{k}{p_e}\right)$ respectivement égales à 22,75; 8,62; 6,50; 4,14.

Il est maintenant facile d'extraire du tableau XIII les valeurs de $\frac{r}{h}$ correspondant aux valeurs de $\left(\frac{k}{p_e}\right)$ ci-dessus et aux valeurs respectives de $2\varphi_0$. Par interpolations on obtient pour valeurs de $\frac{r}{h} = 12{,}24;\ 3{,}77;\ 3{,}98;\ 5{,}04$; et pour valeurs du rapport $\frac{h_e}{h}$ (en augmentant les premières de 0,5), on trouve $\frac{r_e}{h} = 12{,}74;\ 4{,}27;\ 4{,}48;\ 5{,}54$.

La planimétrie (fig. 9) assignant au rayon d'extrados une valeur de 37,50 *m.*, les épaisseurs (h) des anneaux, aux cotes 149 *m.*; 131 *m.*; 121,50 *m.*; 99,50 *m.*, seront par suite $h =$ 2,95 *m*; 8,78 *m.*; 8,37 *m.*; 6,77 *m.*

Calculé comme s'il avait la même amplitude de 30°, l'anneau de base devra avoir une épaisseur de 6,96 *m.*

On peut donc, dès maintenant, tracer le profil *théorique*

---

de choisir pour cette amplitude, la valeur maximum compatible avec un bon encastrement de l'ouvrage dans les rives de la vallée.

de la section transversale du barrage : il est représenté par la ligne MACEGN de la fig. 10, sur laquelle est également tracé le profil pratique à lui substituer : ce dernier obtenu en aug-

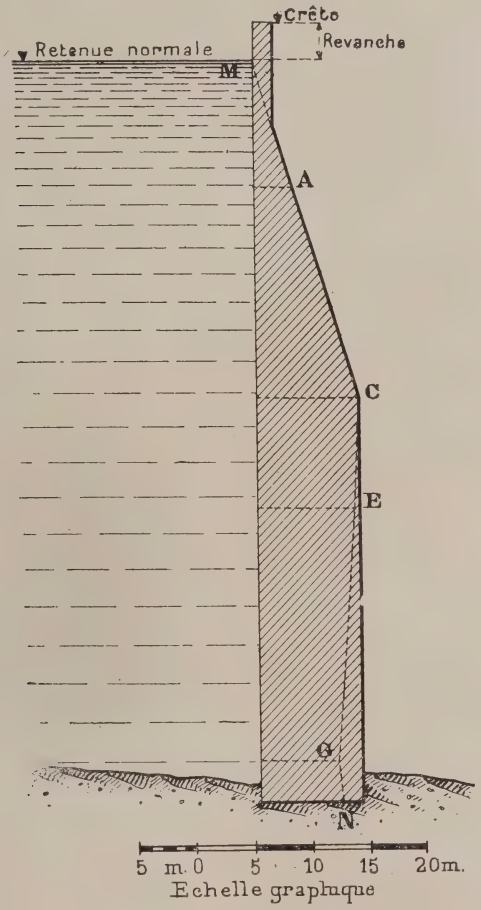


FIG. 10.

mentant, dans la partie inférieure de l'ouvrage, les épaisseurs qui décroissaient en dessous du point C, et que l'on peut maintenir pratiquement constantes, ainsi qu'en dimensionnant rationnellement la crête. Le profil définitif du barrage

ainsi obtenu, et représenté en trait plein (fig. 10), est reporté sur la planimétrie (fig. 9).

Une fois obtenu le profil pratique d'un barrage à arche unique, il est toujours désirable de calculer pour chaque anneau (en dehors de ce qui concerne les efforts dus aux changements de température, étudiés dans le chapitre suivant) les efforts maxima et minima, au moins pour les sections de clef et de naissances; ceci dans le but de déterminer l'importance des efforts de traction (inévitables, ainsi qu'on l'a vu au chapitre précédent, pour les petites amplitudes, quelles que soient les épaisseurs de l'ouvrage), et de prévoir pour y faire face, les armatures métalliques nécessaires (1).

Pour la détermination des σ_e, σ_i, σ'_e, σ'_i on pourra consulter utilement les tables calculées par Guidi, ou encore se servir des formules de Ritter, en fonction des coefficients C_1 à C_5, pont on a donné les valeurs pour des amplitudes de 10° à 180° dans le tableau I (chap. I^er).

6. — Conditions d'économie maxima dans les barrages a corde variable.

La configuration topographique et la structure géologique de la gorge à l'emplacement choisi pour un barrage imposent parfois une solution déterminée, qui ne peut guère varier que dans des limites très étroites. Mais il arrive cependant, la plupart du temps, que les conditions locales laissent au projeteur, pour le choix du tracé de l'ouvrage, une latitude suffisante pour qu'il devienne désirable de rechercher la solution la plus économique, au point de vue du cube des maçonneries (2).

---

(1) L'usage du tableau II (chapitre I^er) facilitera beaucoup cette détermination des efforts de traction.

(2) Cette recherche est surtout intéressante lorsqu'on peut donner à l'anneau supérieur une amplitude voisine de 180°. Si, au contraire, les limites du choix imposent, pour cette amplitude, une valeur maximum sensiblement infé-

Pour déterminer la solution la plus convenable, on supposera, pour l'anneau superficiel, une certaine série d'amplitudes, pour lesquelles on déterminera successivement le profil théorique et le profil pratique correspondants.

Divisant ensuite chacune des sections transversales ainsi établies en tranches de hauteurs égales, on pourra, pour chaque tranche, à l'aide de la planimétrie, déterminer, les cordes (l) des différents anneaux, et déduire des tableaux IV et XI les rapports $\left(\frac{V}{l^2}\right)$ et par suite les volumes (V). La somme des volumes V donnera, pour chaque profil essayé, le volume total du barrage, de telle sorte qu'il devient alors enfantin de choisir, parmi ces profils, celui pour lequel le volume total de l'ouvrage sera minimum.

Au lieu des rapports $\frac{V}{l^2}$ on peut utiliser également $\frac{V}{r^2}$ ou $\frac{V}{r_c^2}$ figurant dans les deux dernières colonnes des tableaux IV et XI.

De toute manière, ce procédé est d'application fort laborieuse, à cause de la double interpolation qui devient nécessaire lorsque les valeurs de $2\varphi_0$ et de $\frac{r}{h}$ ne se trouvent pas directement dans les tableaux.

Mais, M. Ippolito tourne la difficulté en indiquant un procédé graphico-analytique moins laborieux et pour lequel il a établi le graphique faisant l'objet de la planche 11-12 lequel offre l'appréciable avantage d'être dessiné une fois pour toutes, quelles que soient la forme et les dimensions de la gorge à barrer, et, par suite, celles de l'ouvrage à construire.

Ce graphique représente les diagrammes de $\frac{V}{r^2}$ en fonction

---

rieure à 180°, la solution la plus économique correspond précisément à ce maximum.

du rapport $\frac{k}{p_e}$ (et mieux encore, du rapport inverse $\frac{p_e}{k}$, qui est proportionnel aux hauteurs), et pour différentes valeurs de $(2\varphi_0)$ comprises entre 10° et 180°. Si le barrage, au lieu d'être à parements symétriques avait son parement amont vertical, le graphique de ladite planche 11-12 serait à remplacer par celui de la planche 13-14 parfaitement semblable au premier, mais dans lequel, au lieu des quantités $\left(\frac{V}{r^2}\right)$ on a porté, comme ordonnées, les quantités $\left(\frac{V}{r_e^2}\right)$, tirées des dernières colonnes des tableaux IV et XI, et présentant, entre elles, la relation, très simple :

$$\frac{V}{r_e^2} = \frac{V}{r^2} \times \frac{r^2}{r_e^2} = \frac{V}{r^2}\left(\frac{2\eta}{2\eta+1}\right)^2.$$

Une fois assignée la valeur de (k), les abscisses des courbes sont, comme on l'a vu, proportionnelles aux profondeurs (x) de chaque anneau sous le niveau des plus hautes eaux. Dès lors, ayant ainsi établi l'amplitude $2\varphi_0$ de l'anneau superficiel et la valeur correspondante du rayon r, constant sur toute la hauteur, on extrait du plan topographique par le procédé indiqué ci-dessus, les profondeurs (x) et, par suite, les valeurs $\left(\frac{p_e}{k}\right)$ des abcisses relatives aux anneaux sous-tendant des angles $(2\varphi_0)$ respectivement égaux aux index des courbes dessinées sur le premier graphique (pl. 11-12).

On détermine ensuite, pour chaque anneau, le point qui se trouve sur la courbe $\left(\frac{V}{r^2}\right)$ correspondante et qui a pour abscisse la valeur correspondante de $\left(\frac{p_e}{k}\right)$. Réunissant alors tous les points obtenus par une ligne brisée, cette ligne aura les abscisses proportionnelles aux profondeurs, les ordonnées également proportionnelles aux volumes de chaque anneau

et la surface comprise entre cette ligne, l'axe des abscisses et les ordonnées extrêmes sera évidemment proportionnelle au volume total du barrage.

Si l'on répète la construction plusieurs fois, en partant de différentes valeurs de $2\varphi_0$ pour l'anneau superficiel (et, par suite, du rayon r) puisque l'on planimètre les aires ci-dessus indiquées S_1 — S_2 — S_3 ..., correspondant aux différents rayons : r_1 — r_2 — r_3..., les produits :

$$S_1 r_1^2;\ S_2 r_2^2;\ S_3 r_3^2;\ \ldots\ldots$$

seront proportionnels au volume total du barrage dans les différentes hypothèses, et il sera alors facile de choisir celle pour laquelle le produit Sr^2 est minimum.

Ce procédé permet de tenir compte des modifications qu'on est toujours conduit à apporter au profil théorique, tant pour donner à la crête de l'ouvrage une épaisseur constructive pratique en même temps qu'une hauteur permettant de retenir à la fois les vagues du lac et un exhaussement inopiné de son plan d'eau en période de crues, que pour uniformiser, à la base, les épaisseurs qu'on ne peut rationnellement pas concevoir décroissantes par rapport à leurs supérieures. Et c'est dans ce but qu'ont été tracées, dans la partie inférieure du graphique des courbes auxiliaires qui réunissent tous les points pour lesquels est constant le rapport $\eta = \frac{r}{h}$.

EXEMPLE NUMÉRIQUE DE CALCUL D'UN BARRAGE

L'application du procédé indiqué nous paraît devoir nécessiter un exemple pour être mieux compris.

Soit K H H_1 K_1 (planche 11-12) la section transversale de la gorge, supposée arrêtée à l'horizontale H H_1, obtenue par le dérasement habituel du rocher du thalweg. La largeur

en fondations, K K_1, de la gorge au niveau des plus hautes eaux est de 40 *m.*, et la hauteur de ce niveau au-dessus du thalweg, H H_1, de 35 *m.* Supposons encore que la configuration de la gorge nous laisse le choix pour la détermination de l'amplitude ($2\varphi_0$) de l'anneau superficiel jusqu'à $2\varphi_0 = 180^\circ$.

Donnons à cette amplitude les valeurs successives : 180°; 170°; 160°; 140°; 120°, et voyons dans quel cas le volume du barrage ainsi caractérisé sera minimum.

Décrivons une série d'arcs de cercle ayant 40 *m.* de corde et des angles au centre égaux aux amplitudes ci-dessus; puis, sur chacun de ces arcs, choisissons des arcs moindres, avec des angles au centre décroissant de 10° en 10°, et mesurons la longueur des cordes ainsi que celle des arcs sous-tendus. Il sera, maintenant facile de rechercher, sur le profil transversal K H H_1 K_1 de la gorge, des cordes égales, et de noter leurs profondeurs respectives.

A gauche de ce profil ont été tracées, sur cinq verticales, les échelles respectives des amplitudes et des profondeurs : construction de géométrie élémentaire sans difficulté. Supposons l'ouvrage construit en béton de ciment et la charge de sécurité de ce matériau estimée à :

$$k = 250 \text{ tonnes pour m}^2 \ (25 \ kgs/cm^2.).$$

On aura :

$$\frac{p_e}{k} = \frac{x}{250} = 0{,}004 . x$$

x étant la profondeur sous le niveau de retenue normale. Si $2\varphi_0 = 180^\circ$ pour l'anneau superficiel, on aura $r = 20$ *m.*, et, de la première échelle, à gauche du profil de la gorge, on extraira les valeurs suivantes, pour $\left(\frac{p_e}{k}\right)$ et (x), correspondant aux différentes amplitudes :

Tableau XIV.

$2\varphi_0$	180°	170°	160°	150°	140°	130°	120°	100°
x	0	0,5	1	2	4	6	11	13,25
$\frac{p_e}{k}$	0	0,002	0,004	0,008	0,016	0,024	0,044	0,053
$2\varphi_0$	100°	90°	80°	70°	60°	50°	45°	
x	15	16	17,50	22	27,50	33	35	
$\frac{p_e}{k}$	0,060	0,064	0,070	0,088	0,110	0,132	0,140	

Superposons maintenant au graphique de la planche 11-12, une feuille de papier calque — préférablement millimétré — et marquons les points qui ont pour abscisses les valeurs ci-dessus de $\left(\frac{p_e}{k}\right)$ et pour ordonnées des points successivement situés sur les courbes $\left(\frac{V}{r^2}\right)$, pour $2\varphi_0 = 180°; 170°$, etc...

Réunissant alors les points ainsi déterminés nous obtiendrons une ligne **O A B C**, indiquée en pointillé sur le graphique (planche 11-12), et, traçant l'ordonnée extrême **C D**, la surface (S) délimitée par le polygone **O A B C D O** représente le rapport entre le volume total (W) du barrage et le carré du rayon constant, c'est-à-dire le terme $\frac{W}{r^2}$.

Remarquant l'allure de la ligne **O A B C D O** par rapport aux courbes η tracées sur le graphique, on s'assurera facilement si les épaisseurs sont toujours croissantes vers le fond de la gorge ou si, au contraire, elles vont décroissant à partir d'un certain point. Dans l'exemple choisi, on voit qu'à partir du point R, pour lequel $\eta = 4{,}3$, les valeurs de η relatives aux points de la

ligne O A B C augmentent et, par suite, les épaisseurs diminuent. A partir du point R, il importe donc de corriger la ligne des volumes, à la condition, toutefois, de maintenir constante la valeur de η. Ainsi, par exemple, au point C, qui correspond à l'amplitude de 45° on substitue le point C_1, dont l'ordonnée D C_1 est égale à l'ordonnée T T′ du point T, intersection des lignes $2\varphi_0 = 45°$ et $\eta = 4{,}3$. Et, par substitutions analogues pour les autres points, entre R et C, on arrive à remplacer la ligne R C D par le tracé R C_1 D.

Pour tenir compte de l'épaisseur pratique et aussi de la hauteur à donner à la crête de l'ouvrage, au-dessus du niveau de retenue normale, on opère de façon semblable :

Soit 0,50 *m.* l'épaisseur au couronnement, et 3 *m.* la hauteur de revanche en crête. Le rapport $\eta = \frac{r}{h}$, au sommet, au lieu d'être infiniment grand, comme dans le profil théorique, aura pour valeur finie :

$$\eta = \frac{r}{h} = \frac{20}{0{,}5} = 40.$$

Le point A où la ligne O A B C coupe la courbe $\eta = 40$ donne la profondeur à laquelle le profil théorique rejoint l'épaisseur de 0,50 *m.* Au-dessus de ce point l'épaisseur est invariable et, par suite, également invariable est le rapport η.

Si, maintenant, nous portons comme ordonnées, sur les verticales correspondant aux valeurs de $\frac{p_e}{k}$ pour lesquelles $2\varphi_0 = 180° - 170° - 160°$, etc..., les ordonnées des points d'intersection des courbes $\frac{V}{r^2}$ pour 180 — 170 — 160°, etc... avec la courbe $\eta = 40$, on obtient la polygonale A a b c d M, qui remplace la courbe O A de telle sorte que l'aire M d c h a AOM comprise entre les deux lignes représente le supplément de volume du barrage résultant de la modification des épaisseurs au sommet.

Enfin sur l'axe des abscisses, mais à gauche du point O,

traçons le segment P O $= 0{,}004 \times 3$, qui représente la revanche de 3 *m.* qu'on veut donner à la crête du barrage : l'aire du rectangle O M N P représentera le volume de la partie exhaussée de l'ouvrage.

Donc, en définitive, la surface de la figure P N M d c b a A B R C_1 D O P comprise entre l'axe des abscisses et la ligne pointillée, représente le rapport $\frac{W}{r^2}$, compte tenu de toutes les corrections apportées au profil théorique tant en base qu'en crête de l'ouvrage. Il faudra maintenant répéter la construction — du reste très simple — en partant de $2\varphi_0 = 170^\circ$ et superposant au graphique de la planche 11-12, une autre feuille de papier calque, afin de ne pas surcharger la construction déjà confuse des courbes $\frac{V}{r^2}$. Le rayon, cette fois-ci, aura pour valeur :

$$r = \frac{l}{2 \sin \varphi_0} = 20{,}076.$$

Par semblable application du procédé aux amplitudes $2\varphi_0 = 160^\circ$; 140° et 120°, mesurant au planimètre les surfaces tracées sur les feuilles de papier calque, et multipliant chacune d'elles par le carré du rayon correspondant, on obtiendra les nombres proportionnels aux volumes de l'ouvrage dans les diverses hypothèses.

Les résultats sont consignés dans le petit tableau suivant :

TABLEAU XV.

$2\varphi_0$	S	Sr^2	S_t	$S_t r^2$
180°	3.603	14.412	3.365	13.460
170°	3.526	14.211	3.301	13.304
160°	3.500	14.435	3.284	13.544
140°	3.203	14.510	3.029	13.722
120°	2.932	15.640	2.772	14.787

Les valeurs (Sr^2) consignées dans la troisième colonne sont proportionnelles au volume total du barrage dans les diverses hypothèses; celles portées dans les deux dernières colonnes (S_t) et ($S_t r^2$) sont relatives aux profils théoriques, avec épaisseur nulle au sommet, mais avec la correction des épaisseurs à la base. La consultation de ce tableau indique nettement que, dans les deux cas, l'amplitude optima, pour l'anneau supérieur, est d'environ 170°; toutefois, une observation attentive des données des 3e et 5e colonnes (Sr^2) et ($S_t r^2$), montre que, pour le profil théorique, l'angle est légèrement supérieur (1).

L'exemple qui précède confirme pour les arcs à corde variable, ce qui est déjà bien connu pour ceux à corde constante, à savoir qu'une différence d'une dizaine de degrés, en plus ou en moins, — à partir de l'amplitude optima —, dans la valeur de cette amplitude, n'accroît guère le volume de l'ouvrage que de $1 \div 2$ %, c'est-à-dire fort peu... Il permet, en outre, de remarquer que si la section de la gorge — toutes autres données subsistant, telles qu'elles ont été admises — présentait de haut en bas une largeur constante et égale à 40 *m.*, l'amplitude optima, calculée avec les formules déjà exposées, aurait sensiblement la même valeur : exactement 170° 30′.

On ne peut évidemment pas tirer de ce cas particulier, une conclusion d'ordre général, mais nous croyons toutefois, avec M. Ippolito, qu'on peut affirmer que, dans la plupart des cas, la valeur de cette amplitude optima n'est que fort peu affectée par les variations du profil de la gorge à barrer.

---

(1) La correction de l'épaisseur, de même que l'exhaussement de revanche, ont donc — comme il était facile de le prévoir — une tendance à abaisser la valeur de l'amplitude optima.

Il est juste, toutefois, d'ajouter que le déplacement de cette valeur est peu sensible.

CHAPITRE III

INFLUENCE DES VARIATIONS THERMIQUES

Les efforts dus aux variations thermiques sont, sans doute, remarquables dans des constructions telles que les barrages, établis, pour la plupart, dans des régions montagneuses où les différences de température sont plus fortes que nulle autre part.

Toutefois, l'étude de ces efforts présente toute une série de difficultés, parce que, d'une part, il est très malaisé de connaître la distribution exacte des températures dans l'intérieur d'un massif de maçonnerie, et que, d'autre part, même en supposant connue cette distribution, aucune méthode de calcul certaine ne permet d'en déduire les efforts intérieurs qu'elle détermine. Par ailleurs, il faut encore ajouter à ces derniers l'influence, très remarquable, des manifestations thermiques inhérentes à la prise du ciment, ainsi que celle, moindre, mais non négligeable cependant, de la contraction du béton durant la prise, particularités qui compliquent encore l'examen analytique, déjà très difficile, du phénomène lui-même.

Néanmoins, l'étude séparée des différents facteurs du problème, même à l'aide d'hypothèses simplificatives, peut donner de très utiles indications susceptibles de servir de guide pour une étude analytique et expérimentale, plus approfondie, du problème entier.

Jusqu'à présent, les rares études du phénomène ont, toutes, été basées sur des hypothèses très simples consistant à admettre des variations uniformes de température pour les différents points considérés dans l'intérieur du barrage, ou pour des variations linéaires (V. chap. I[er]); mais, en réalité,

il en va bien différemment, et, quoique on ne puisse donner de cette affirmation une démonstration rigoureuse, il est, néanmoins, hors de doute que ces hypothèses donnent des efforts excessifs dans la plupart des cas : nombre de constructeurs, aidés par les résultats de quotidiennes observations et expériences, ont sur la question une opinion bien fixée (1), qu'on ne saurait négliger ni passer sous silence; et cela suffit, pensons-nous, pour attester de l'importance du problème, dont M. Ippolito, le premier, a eu le rare mérite d'approfondir l'étude.

Il donne, tout d'abord, des formules simples, approchées, dans le but de permettre que le calcul direct des arcs par les procédés exposés au chapitre II ci-dessus se puisse effectuer en tenant compte, même sommairement, des efforts dûs à la température.

Ensuite, il essaie de poser de façon plus rationnelle le problème des efforts thermiques, en généralisant les formules de Guidi, ainsi que les (11) du chapitre I^{er}, de façon à pouvoir les adopter pour une distribution quelconque des températures. Enfin, étudiant encore la nature et le type de ces distributions de température et rappelant les expériences auxquelles nous faisons allusion plus haut, il extrait de leurs résultats connus un contrôle des hypothèses faites en même temps que de précieuses indications pour les recherches ultérieures.

1. — Calcul direct des barrages en arc, en tenant compte des efforts thermiques.

Le but de ce paragraphe est de généraliser les résultats obtenus dans le chapitre II, de manière à pouvoir calculer directement un anneau de barrage, ainsi que son amplitude

(1) Voir Mc Intosch (*Engin. News Record*, sept. 1919); Ganassini (*Politecnico*, 1921), etc.

optima, en tenant compte non seulement de la pression hydrostatique, mais aussi des efforts dûs à une variation linéaire de la température. Cette dernière (chap. I[er]) peut être décomposée en une variation uniforme (t_0), et une autre, variable linéairement de $+\frac{\Delta t}{2}$ à $-\frac{\Delta t}{2}$ entre les parements amont et aval. On a déjà vu qu'en tenant compte exclusivement de la pression hydrostatique, dans les arcs à section circulaire et d'épaisseur constante, les efforts maxima se produisent (efforts thermiques négligés) à l'intrados des naissances. Or, les dilatations thermiques ont pour effet de déplacer ces efforts, dont les maxima peuvent passer de l'intrados à l'extrados et de la section de naissance à la section de clef.

Toutefois, dans les conditions les plus générales, si la température, au moment de l'exécution des travaux, est intermédiaire entre les maxima hivernal et estival, les efforts unitaires à la clef demeurent généralement inférieurs (ou à peine supérieurs) à ceux des naissances. Et, effectivement, ce sont ces conditions générales qui se rencontrent le plus souvent dans la pratique, car on construit toujours dans des conditions moyennes de température : toutes les bonnes méthodes déconseillant nettement de construire, ou, pour le moins, de claver des arcs par des temps trop rigoureux en froid comme en chaud. Du reste, dans les arcs clavés par saisons tièdes, on a précisément l'avantage de réduire les écarts entre les efforts thermiques dûs aux variations de température. Pour ces considérations, et en vue d'établir des formules simples et approchées, on peut limiter l'analyse à la seule formule qui donne l'effort maximum à l'intrados des naissances, c'est-à-dire [form. (11) du chap. I[er]] :

$$(1_B) \qquad \varsigma'_i = -\mathrm{E}\alpha\left(t_0\frac{h}{r}\mu'_i + \frac{\Delta t}{2}\right)$$

dans laquelle, si t_s et t_i sont les variations de température

sur les parements amont et aval, à partir de l'état initial constaté, on a :

$$t_0 = \frac{t_e + t}{2} \quad \text{et} \quad \frac{\Delta t}{2} = \frac{t_e - t_i}{2}.$$

Le coefficient de (t_0), c'est-à-dire le terme $\left(\frac{h}{r}\mu'_i\right)$ dans la formule (1_B) ci-dessus, est, en général, très inférieur à l'unité, surtout si l'amplitude est grande, et l'arc n'est pas trop surchargé; de sorte que le terme qui a le plus d'importance dans la formule (1B) est $\left(\frac{\Delta t}{2}\right)$, et le cas le plus défavorable se produit quand $\left(\frac{\Delta t}{2}\right)$ est négatif, parce que, alors, ς_i', étant une compression, vient s'ajouter aux efforts de même sens dûs à la pression hydrostatique.

Mais le minimum de $\left(\frac{\Delta t}{2}\right)$ se produit pour (t_i) positif et (t_e) négatif, c'est-à-dire lorsque la différence de température entre les parements est maximum : celui d'aval étant à température plus élevée que celui d'amont.

Il s'ensuit donc qu'il importe de considérer les maxima d'été avec réservoir plein comme étant susceptibles de donner, en amont, la température minimum (la température de l'eau étant, en général, toujours inférieure à la température moyenne de construction), et en aval, la plus haute température atmosphérique. C'est précisément dans ce cas que le terme $\left(t_0\frac{h}{r}\mu'_i\right)$ atteint sa valeur minimum, puisque $t_0 = \frac{t_e + t_i}{2}$ et que t_e et t_i étant de sens contraires, sa valeur absolue est inférieure à la valeur absolue de $\left(\frac{\Delta t}{2}\right)$. Si, dans une première approximation, nous négligeons ce terme, en posant

$$\varsigma'_i = -\,\mathrm{E}\alpha\,\frac{\Delta t}{2}$$

il en résultera que ς_i, indépendant de la température de

construction, dépend seulement de la plus grande différence (Δt) entre les températures estivales d'aval et d'amont. Par ailleurs, étant donné que l'effort total, à l'intrados des naissances, ne doit pas dépasser la charge de sécurité (k) à la compression, on a :

$$k = p\left(\frac{r}{h} + \mu'_i\right) - \mathrm{E}\alpha\,\frac{\Delta t}{2}$$

dans laquelle, si l'on pose :

$$(2_B) \qquad k_1 = k + \mathrm{E}\alpha\,\frac{\Delta t}{2}$$

on aura :

$$k_1 = p\left(\frac{h}{r} + \mu'_i\right)$$

Cette formule est tout à fait semblable à celle que nous avons prise comme base d'étude pour l'analyse du chap. II, avec la seule différence qu'à la charge de sécurité k, on a substitué la charge fictive $\left(k + \mathrm{E}\alpha\frac{\Delta t}{2}\right)$. Et cette charge peut être calculée *a priori*, étant indépendante de la forme et des dimensions de la voûte. On peut, dès lors, se reporter à la discussion du chapitre II et retenir ses résultats comme valables, même en ce qui concerne les effets cumulés de la pression hydrostatique et des variations de température, pourvu que l'on adopte comme charge de sécurité la charge fictive (k_1) en lieu et place de la charge réelle (k).

Pour un climat modéré, où l'on peut estimer à environ 10° la température de l'eau du réservoir et à 30° la plus forte température extérieure, on peut poser $\frac{\Delta t}{2} = -10$, et, par suite :

$$k_1 = k - 10\,.\,\mathrm{E}\alpha.$$

Avec un béton de ciment ayant pour module d'élasticité : $\mathrm{E} = 200.000\ kg./cm^2$ et présentant un coefficient de dilatation linéaire : $\alpha = 0{,}000\ 013$, on a :

$$k_1 = k - 26\ kg./cm^2.$$

D'où l'on voit immédiatement l'importance de l'influence que peuvent atteindre les efforts thermiques, quand on les calcule avec les formules actuellement en usage. En fait, si la charge (k) est de 40 *kg./cm²*, la charge (k_1) se réduira à 14 *kg./cm²*, c'est-à-dire à environ un tiers de (k), dans les hypothèses de température ci-dessus adoptées (1).

Dans ce qui précède, nous avons, sciemment, négligé de tenir compte du terme $\left(t_0 \frac{h}{r} \mu'_i\right)$. Mais on peut parfaitement le faire intervenir, en observant que

$$\frac{h}{r} \mu'_i = \frac{\mu'_i}{\eta}$$

et que les valeurs de $\frac{\mu'_i}{\eta}$ ont été calculées et reportées dans le tableau ci-après, pour des valeurs de $2\,\varphi_0$ variant de 180° à 50° et pour des valeurs de η entre 5 et 40 jusqu'à $2\,\varphi_0 = 120°$, et entre 4 et 20 pour $2\,\varphi_0 < 120°$.

La formule (1B) peut alors s'écrire :

$$(3B) \qquad \varsigma'_i = -E\alpha \left[\frac{\mu'_i}{\eta} t_0 + \frac{\Delta t}{2}\right]$$

---

(1) Pour fixer les idées par un exemple, supposons : $2\,\varphi_0 = 180°$, $p = 1$ *kg./cm²* (impliquant la voûte à une profondeur de 10 mètres). De la formule 5A) et du tableau V du chapitre II (page 54) on tire :

$$\frac{r}{h} = k - 2{,}69,$$

et, par suite, toujours pour $k = 40$ *kg./cm²* :

$$h = \frac{r}{37{,}31}$$

Ceci sans tenir compte de la température; alors qu'en faisant intervenir les efforts thermiques, on aurait :

$$k_1 = 14, \qquad h = \frac{r}{11{,}31} ;$$

et, dans ce dernier cas, l'épaisseur requise dépasserait le triple de celle qui suffirait pour faire face à la seule pression hydrostatique, si l'on n'avait pas à se préoccuper des efforts dus aux changements de température. Ce résultat, certainement excessif, justifie surabondamment la méfiance de nombreux constructeurs à l'égard des formules théoriques usuelles.

et par conséquent :

$$k = p\left(\frac{r}{h} + \mu'_i\right) - \mathrm{E}\alpha\left[\frac{\mu'_i}{\eta}t_0 + \frac{\Delta t}{2}\right].$$

Nous pourrons encore mettre cette formule sous la forme :

$$k_1 = p\left(\frac{r}{h} + \mu'_i\right)$$

à la condition de poser :

$$k_1 = k + \mathrm{E}\alpha\left[\frac{\mu'_i}{\eta}t_0 + \frac{\Delta t}{2}\right] \qquad (4\text{B})$$

Le calcul peut alors procéder comme il est dit au chapitre II, en adoptant une charge de sécurité donnée par la formule (4B) dans laquelle on aura pris pour $\frac{\mu'_i}{\eta}$ une valeur moyenne approximative, suggérée par l'examen du tableau XVI ci-après, et pour t_0 et $\frac{\Delta t}{2}$ les valeurs correspondant à une hypothèse de variation thermique, qui donne pour l'expression entre crochets de la formule (4B) une quantité négative et de valeur absolue aussi grande que possible.

Ensuite on calcule la voûte, par les procédés indiqués au chapitre II, en prenant pour charge de sécurité la valeur de k_1 calculée avec la formule (4B), et l'on vérifie si la valeur en résultant pour $\frac{\mu'_i}{\eta}$ est assez voisine de celle assignée d'avance. S'il n'en était pas ainsi, on procéderait à un calcul de seconde approximation, en partant d'une nouvelle valeur de $\frac{\mu'_i}{\eta}$.

Supposons, par exemple, un barrage à arches multiples de 15 *m.* de hauteur, à construire avec un matériau pour lequel $k = 40\ kg./cm^2$ (ou 400 *t.* par m^2) et $\mathrm{E}\alpha = 2{,}5$. On peut prévoir grossièrement une valeur de k_1 variant de 15 à 20 $kg./cm^2$ (c'est-à-dire de 150 ÷ 200 $t./m^2$) et par suite une valeur de $\frac{k_1}{\mathrm{A}} = 10 \div 13$ (A étant la hauteur du barrage).

La seule consultation du diagramme de la figure 8 (page 67) montre que l'angle $2\varphi_0$ le plus favorable est voisin de 160° et, par suite (form. (5A) et tableau V du chap. II) :

$$\eta = \frac{k}{p_e} - 3{,}44.$$

Cela donne pour l'anneau inférieur $\eta = 7 \div 10$ environ. Du tableau XVI on déduit encore $\frac{\mu'_i}{\eta} = 0{,}3$ environ; et finalement, au sommet, on aura $\eta = 20\,\frac{\mu'_i}{(e)\,\eta} = 0{,}15$.

On pourra donc choisir comme première approximation de la valeur moyenne de $\frac{\mu'_i}{\eta} = 0{,}22$.

Supposons maintenant que, parmi les hypothèses de températures les plus défavorables, on choisisse $t_0 = +5$, $\frac{\Delta t}{2} = -10$ comme donnant pour l'expression entre crochets de la formule (4B) une quantité négative de plus grande valeur absolue, nous aurons :

$$k_1 = k + 2{,}5\ (0{,}22 \times 5 - 10) = 40 - 22 = 18\ kg./cm^2.$$

Cette valeur se tenant entre les limites prévues, il n'y a pas lieu de procéder à de nouveaux calculs pour obtenir une plus grande approximation.

Une fois déterminée — par les procédés sus-indiqués — l'amplitude optima à donner à l'arc, il peut être utile de disposer d'une formule simple pour le calcul de ses différents anneaux et du rapport (η), en tenant compte des variations thermiques, bien que la méthode ci-dessus exposée soit assez simple pour qu'on puisse aisément l'appliquer au calcul de chaque anneau.

Tableau XVI.

$2\varphi_0$	Valeurs de $\frac{\mu_t}{\eta}$							
	pour $\eta = 4$	pour $\eta = 5$	pour $\eta = 7{,}5$	pour $\eta = 10$	pour $\eta = 15$	pour $\eta = 20$	pour $\eta = 30$	pour $\eta = 40$
180°	—	0,400	0,277	0,210	0,141	0,107	0,071	0,053
170°	—	0,460	0,321	0,245	0,165	0,124	0,083	0,062
160°	—	0,530	0,373	0,285	0,193	0,146	0,098	0,073
150°	—	0,609	0,434	0,334	0,227	0,176	0,115	0,086
140°	—	0,699	0,506	0,392	0,267	0,202	0,136	0,102
130°	—	0,801	0,591	0,461	0,318	0,241	0,162	0,122
120°	—	0,913	0,692	0,546	0,377	0,288	0,194	0,147
110°	1,124	1,037	0,814	0,652	0,455	0,350	—	—
100°	1,192	1,138	0,935	0,765	0,545	0,421	—	—
90°	1,241	1,243	1,091	0,920	0,672	0,525	—	—
70°	1,070	1,226	1,323	1,244	1,000	0,818	—	—
50°	0,451	0,695	1,136	1,370	1,535	1,365	—	—

Posons, comme plus haut, pour simplification :

$$(5_B) \qquad \frac{\mu'_t}{\eta} = \frac{c}{\eta + b}$$

et comparons cette formule à la (5A) du chapitre II; on a :

$$(6_B) \qquad k = p_e(\eta + a) - E\alpha\left(\frac{c}{\eta + b}t_0 + \frac{\Delta t}{2}\right).$$

D'où l'on tire, après réductions :

$$(7_B) \qquad p_e\eta^2 - \left\{\left[k - ap_e + E\alpha\frac{\Delta t}{2}\right] - bp_e\right\}\eta$$

$$- \left\{\left[k - ap_e + E\alpha\frac{\Delta t}{2}\right]b + E\alpha ct_0\right\} = 0.$$

De cette équation du second degré en (η) on peut calculer la valeur de $\eta = \frac{r}{h}$, et, par suite, celle de (h), pour chaque anneau.

La valeur du coefficient a est donnée par le tableau V du

chapitre II, tandis que celles de b et de c, tirées des données du tableau XVI, d'après la méthode des moindres carrés, sont réunies dans le tableau XVII ci-après. Dans ce tableau sont également reportées les valeurs de (a) [1].

Tableau XVII.

$2\varphi_0 =$	180°	170°	160°	150°	140°	130°	120°
a	2,69	3,05	3,44	3,91	4,45	5,07	5,80
b	0,30	0,42	0,58	0,68	0,84	1,12	1,41
c	2,16	2,53	3,00	3,56	4,20	5,06	6,12

L'usage de la formule (7B) est illustré par l'exemple ci-après :

Soient [2] :

$$p_e = 1{,}5; \quad 2\varphi_0 = 150°; \quad E\alpha = 1{,}35$$
$$t_0 = 5; \qquad \frac{\Delta t}{2} = -10.$$

Si l'on pose $\eta = 12{,}50$, on trouve $\sigma_t' = 36{,}4$. Remplaçant (k) par cette valeur, de 36,4 $kg./cm^2$, dans la formule (7B), on obtient, par calcul direct :

$$1{,}5 \cdot \eta^2 - 16{,}015 \cdot \eta - 41{,}065 = 0$$

et, par suite :

$$\eta = 12{,}81.$$

La différence avec la valeur exacte est voisine de 2,5 %, mais l'avantage d'un calcul direct par rapport à la méthode de vérification est incontestable.

Et, par ailleurs, il faut bien reconnaître qu'en général,

(1) Ce tableau XVII est arrêté à l'amplitude $2\varphi_0 = 120°$ par crainte des erreurs d'approximation, que l'on doit vraiment considérer comme trop grossières pour les amplitudes inférieures (la formule (7B) n'étant plus applicable).

(2) Données de Guidi, dans sa *Statica delle dighe*.

dans les calculs de vérification, on se contente d'une approximation bien plus grossière; par exemple, ayant admis une charge de sûreté de 40 $kg./cm^2$, avec $\eta = 12{,}50$, le calcul de vérification indique un travail de compression $\sigma'_i = 36{,}4$ $kg./cm^2$. L'approximation est alors de 9 %, et le plus souvent, cependant, on s'en tient là sans chercher à rapprocher davantage σ'_i de k.

2. — Facteurs tendant a limiter les efforts dus aux variations thermiques.

Ainsi qu'on vient de le montrer, l'effet thermique, calculé comme on l'a fait jusqu'à présent, conduit à une évaluation certainement excessive des efforts unitaires.

Cherchant à expliquer cette discordance entre les résultats théoriques et la réalité physique du phénomène, M. Ippolito estime qu'elle est due principalement à deux facteurs, dont le premier, consistant dans la différence, substantielle (1), qui subsiste entre les effets de déformations dus à la charge et ceux dus aux dilatations ou contractions thermiques; le second dépendant de ce que la distribution réelle des températures, à l'intérieur d'un massif de maçonnerie, ne peut pas être considérée comme uniforme, ou variable suivant une loi linéaire, sans risquer de s'exposer à des approximations trop grossières et, par suite, à des erreurs sensibles. Les déformations produites par les forces extérieures qui agissent sur une construction, n'ont, en général, qu'une influence négligeable sur la position et l'intensité desdites forces, car, même après que ces déformations ont eu lieu, les forces extérieures agissent encore sur la construction avec la même intensité qu'auparavant, et leurs points d'application n'ont subi que des déplacements insensibles si les déformations du système sont elles-mêmes très petites.

(1) Pour ce qui concerne le rapport entre la force agissante et la déformation.

Mais les choses se passent d'une manière bien différente en ce qui concerne les changements de température. En effet, à mesure que se produit la déformation due à une dilatation thermique, cette déformation modifie sensiblement la force agissante, au point que, si cette déformation peut avoir lieu librement, les efforts intérieurs qui l'accompagnent sont pratiquement nuls. Or, les naissances d'un arc ne sont pas absolument rigides, comme on le suppose dans les calculs, et, par suite, la déformation élastique des culées et la rotation des sections de naissance ne sont pas rigoureusement nulles. Encore y a-t-il lieu d'ajouter à cette considération que, dans une structure en maçonnerie, il y a toujours certains points où des mouvements très petits peuvent se produire et, par suite, engendrer des affaissements permanents sous l'action des efforts extérieurs.

On peut donc, sans crainte d'erreurs sensibles, considérer comme admissible l'hypothèse de l'indéformabilité absolue des sections extrêmes d'un arc, lorsqu'il s'agit de la détermination des efforts dus aux forces extérieures, telles que les poids propres, les poussées hydrostatiques, etc. (On suppose alors la voûte encastrée rigidement aux culées.) Mais cette hypothèse n'est plus acceptable lorsqu'il s'agit des déformations dues à des forces intérieures telles que celles provoquées par les dilatations ou contractions thermiques.

Chaque déformation, élastique ou permanente, des culées, chaque affaissement en un point quelconque de l'arc permet une libre dilatation partielle de la structure et, par suite, une diminution correspondante des efforts intérieurs dus à la température.

Il s'agit là d'un phénomène semblable à celui que l'on observe dans les liaisons imparfaites de travées droites encastrées aux appuis, et la rotation partielle des sections d'encastrement modifie la répartition des efforts internes, au point qu'on doit très souvent recourir à l'hypothèse, tout arbitraire, d'un demi-encastrement.

Il n'est malheureusement pas facile d'établir la réduction de l'effet thermique découlant du phénomène ci-dessus indiqué; d'autant plus qu'il échappe à une analyse rigoureuse.

Dans l'état actuel de nos connaissances, on peut seulement admettre, d'après la pratique généralement en usage dans les cas semblables, que les efforts intérieurs dus aux dilatations thermiques par l'effet du phénomène envisagé peuvent être réduits proportionnellement en les multipliant, d'après les méthodes usuelles, par un coefficient χ, inférieur à l'unité, et qui doit être établi pour chaque cas particulier, n'étant pas calculable par des considérations théoriques.

De nombreuses expériences, faites sur des constructions existantes, pourraient, seules, donner d'utiles indications à ce sujet; il faudrait, pour cela, mesurer directement les efforts intérieurs et les comparer avec ceux déduits théoriquement, dans les cas simples pour lesquels ces derniers peuvent être déterminés avec une approximation suffisante.

A cet égard, la méthode suggérée par M. Kambo — que nous avons déjà citée — pourrait donner des résultats fort utiles.

Pour le moment, et dans l'attente de plus sûres indications, on peut faire $\chi = 1$, et, par suite, renoncer à l'avantage de cette réduction des efforts ou, du moins, adopter une nouvelle valeur de χ inférieure à l'unité, mais avec beaucoup de prudence.

Le second facteur, dont on doit tenir le plus grand compte, concerne la différence entre la distribution réelle des températures à l'intérieur d'un barrage (en particulier, d'un barrage en arc) et les distributions uniformes ou linéaires, envisagées jusqu'à ce jour.

Toutefois, l'étude des distributions effectives serait stérile si on ne pouvait ensuite déterminer les efforts intérieurs correspondants. C'est dans cette intention que M. Ippolito a étudié la possibilité d'une généralisation des formules (11) du chapitre I^{er}.

3. — Calcul des efforts intérieurs dus a une distribution quelconque des températures dans un barrage en arc.

Puisque, dans un barrage en arc, l'épaisseur est relativement faible, si on la compare aux autres dimensions, et que, par ailleurs, il y a lieu de négliger, dans l'analyse d'un problème aussi complexe, les perturbations locales dues, par exemple, à l'action directe des rayons solaires sur une partie du parement, à l'influence du contour, etc., on pourra supposer qu'à chaque instant la température est la même, en tous les points du parement aval, de même qu'en tous les points du parement amont, pour une section du barrage d'une hauteur donnée.

Si nous considérons un anneau situé dans la partie centrale de cette section, nous pourrons, sans erreur appréciable, supposer que la transmission de la chaleur, tant sur les surfaces supérieure et inférieure de l'anneau que sur les sections de naissance, est parfaitement négligeable.

La propagation thermique aura lieu selon des lignes normales aux parements et les surfaces isothermiques seront parallèles aux parements mêmes.

La distribution des températures sera la même sur chaque ligne droite normale aux parements et elle sera caractérisée par l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{d^2t}{dx^2} = \frac{\rho c}{K} \cdot \frac{dt}{d\tau} \qquad (8_B)$$

dans laquelle (t) est la température comptée à partir de la température initiale, (τ) le temps, (x) le paramètre d'une surface isothermique, mesuré par sa distance normale à une isothermique fixe, (ρ) la densité, (c) la chaleur spécifique, et (K) le coefficient de conductivité spécifique intérieure du matériau constitutif du barrage.

L'intégration de la formule (8), compte tenu des conditions aux limites, donnerait, dans chaque cas particulier, la loi de distribution des températures à l'intérieur du barrage.

Si cette distribution est uniforme, les efforts de dilatation correspondants sont équilibrés par la réaction qui en résulte, parallèle à la corde de l'arc et agissant au centre de gravité des poids élastiques, ainsi qu'on l'a vu au chapitre 1er. Cette réaction a pour valeur :

$$(9_B) \qquad H_t = E\alpha t_0 \frac{h^3}{6\delta r^2} .$$

Si la distribution des températures, le long de la normale aux parements, varie suivant une loi linéaire, à la poussée ci-dessus, — dans laquelle (t_0) est la variation moyenne de température à partir de la température initiale, — s'ajoutera un moment :

$$(10_B) \qquad \mathfrak{M} = E\alpha \frac{\Delta t}{12} h^2$$

où Δt représente la différence de température entre les parements.

Pour n'importe quelle autre distribution, non linéaire, il est impossible d'adopter la même analyse, parce qu'on ne peut pas supposer réalisée la loi de conservation des sections planes. Ritter affirme — ce qui, du reste, est intuitif — que la réaction totale produite par une distribution quelconque des températures selon la normale aux parements, peut être réduite à une force toujours parallèle à la corde de l'arc, proportionnelle à l'aire du diagramme représentatif des variations thermiques selon la normale, et, agissant à une distance du centre de gravité des poids élastiques croissante avec la discontinuité de la distribution même. Il n'indique, toutefois, aucun moyen de la calculer.

Dans le but d'arriver à un calcul qui, sans être rigoureux, puisse donner cependant de bonnes indications pratiques pour n'importe quelle distribution thermique, M. Ippolito

développe la méthode suivante. Il ne se dissimule point, du reste, qu'elle est basée sur une hypothèse qui, quoique justifiée par l'intuition, demeure toujours arbitraire, mais il objecte à celà — non sans raison — que, dans tous les domaines de la construction, nombre de bonnes méthodes de calculs, d'usage courant, reposent sur des hypothèses tout aussi arbitraires.

Soit (fig. 11), l'arc ABCD de rayon moyen (r), d'épaisseur (h), d'amplitude $2\varphi_0$, et de hauteur égale à l'unité de mesure,

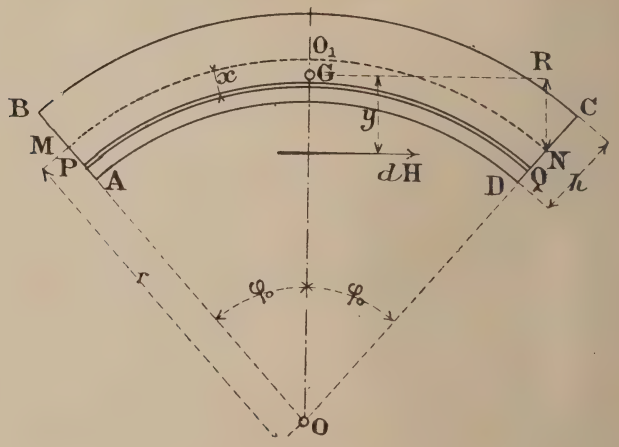


Fig. 11.

et considérons une fibre circulaire d'épaisseur infinitésimale (dx), repérée par sa distance (x) de la fibre moyenne.

Si la température, dans toute l'épaisseur de la voûte, augmente de (t) degrés, la section AB subit une sollicitation qui tend à la déplacer parallèlement à elle-même : la section CD étant supposée fixe. Mais ce déplacement, empêché du fait de l'encastrement, engendre la réaction (H_t) qui agit au point G, centre de gravité des poids élastiques de l'arc, et qui est donnée par la formule (9B) ci-dessus.

Si, maintenant, on suppose que la variation de température idéale est limitée par la fibre PQ, on aura toujours, de

par la solidarité de cette fibre avec l'ensemble de l'arc, une tendance de la section entière AB à se déformer (1) et il s'ensuivra une réaction (dH) qui, à cause de la symétrie de l'arc, sera normale à l'axe GO.

M. Ippolito estime qu'on peut admettre une certaine loi de proportionnalité entre la valeur de (dH) et celle de l'épaisseur de la fibre PQ; d'où résulterait que la réaction (dH) est à la réaction (H_t), donnée par la formule (9B), comme l'épaisseur de la fibre PQ est à l'épaisseur totale (h) de l'arc. A la rigueur, il serait plus logique d'admettre la proportionnalité entre les réactions et les volumes des fibres, puisque les déformations thermiques croissent avec les volumes; toutefois, M. Ippolito observe que la première hypothèse est plus simple, puisque avec elle on néglige seulement la différence de longueur entre les fibres extrêmes de l'arc, ce qui se peut faire avec une approximation suffisante toutes les fois que la valeur de $\frac{r}{h}$ est assez grande, cas qui se présente presque toujours dans la pratique.

En somme, cela revient à poser :

$$\frac{dH}{dx} = \frac{H_t}{h}$$

d'où l'on tire, par application de la formule (9B) :

$$dH = E\alpha t \frac{h^2}{6\,\delta r^2}\, dx \qquad (11_B)$$

ce qui revient à supposer que l'arc ABCD est réduit à la seule fibre PQ, qui aurait toutefois une rigidité équivalente à celle de l'arc initial.

Le point d'application de la réaction (dH) sera générale-

(1) Semblable chose, du reste bien connue, se passe pour un prisme rectiligne posé sur un plan résistant et sollicité par une force concentrée en un point de la base supérieure : la seule fibre verticale correspondant au point d'application de la force est directement sollicitée, mais la section d'appui tout entière concourt à la résistance, avec une distribution de forces unitaires d'autant plus uniforme que le prisme est plus haut.

ment différent de G, et il est même visible qu'il en sera d'autant plus distant que la fibre PQ sera plus éloignée de la fibre moyenne, et dans le même sens.

M. Ippolito fait ici une seconde hypothèse, en admettant qu'entre ces deux distances existe encore une proportionnalité, qui, si l'on appelle (y) la distance de $(d\mathrm{H})$ au point G, et (x) celle de PQ de la fibre moyenne, donnera :

$$y = cx. \qquad (12_B)$$

Les hypothèses (11B) et (12B) sont certainement arbitraires, quoique intuitives; toutefois, il faut remarquer qu'il est d'un usage assez *courant*, en construction, de se contenter d'hypothèses simplificatives non moins arbitraires, dans le but de soustraire la pratique des calculs à des complications analytiques parfois inaccessibles.

En réalité, l'intérêt des (11B) et (12B) est qu'elles permettent la détermination de la poussée totale (H) en grandeur et en position, quelle que soit la distribution des températures.

En effet, supposons connue la fonction, $t\ (x)$, des variations thermiques dans l'épaisseur de l'arc. On aura :

$$\begin{cases} \mathrm{H} = \dfrac{\mathrm{E}\alpha h^2}{6\delta r^2} \cdot \displaystyle\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} t.dx, \\ \mathfrak{M} = \mathrm{HY} = \displaystyle\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y\ d\mathrm{H} = \dfrac{\mathrm{E}\alpha h^2}{6\delta r^2} \displaystyle\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} ty\,dx, \end{cases}$$

Y représentant la distance de la poussée totale (H) au centre de gravité (G), et (M) le moment de H par rapport au point G.

En particulier, pour une distribution uniforme (t = const.), et pour la linéaire avec valeur nulle sur la fibre moyenne $\left(t = \dfrac{\Delta t}{h} x\right)$, on doit retomber sur les (9B) et (10B).

En effet, la (9B) est identiquement vérifiée; et, pour la (10B), remarquant que $t = \frac{\Delta t}{h} x$, on a :

$$H = 0$$

$$\mathfrak{M} = \frac{E\alpha h^2}{6\delta r^2} \cdot \frac{\Delta t}{h} . c . \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} x^2 dx = \frac{E\alpha h^2}{6\delta r^2} \cdot \frac{\Delta t}{h} . c . \frac{h^3}{12} .$$

Égalant cette valeur de (M) à celle donnée par la formule (10B), on déduit la valeur du coefficient (c) :

$$c = \frac{6\delta r^2}{h^2}$$

et, par suite :

$$y = \frac{6\delta r^2}{h^2} . x.$$

Rappelant [form. (8''') du Chapitre Ier] que :

$$6\delta = C_1 + \frac{h^2}{r^2} C_2$$

et que

$$\frac{r}{h} = \eta,$$

on peut écrire :

$$(13_B) \quad \begin{cases} dH = E\alpha \frac{h^2}{6\delta r^2} . t\, dx = \frac{E\alpha}{C_1\eta^2 + C_2} . t dx \\ y = \frac{6\delta r^2}{h^2} . x = (C_1\eta^2 + C_2)\, x. \end{cases}$$

Appelons, maintenant, ABQT (fig. 12) le diagramme des distributions des températures dans l'épaisseur de l'arc, et soient, respectivement S, ζ, $M_s = S\zeta$ l'aire ABQT; la distance du centre de gravité P de cette aire à l'axe moyen Mt; et le moment statique du dia-

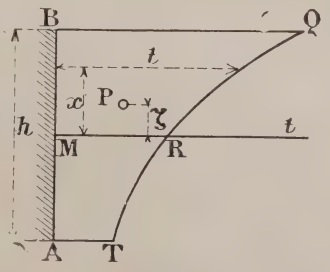


FIG. 12.

gramme par rapport à cet axe. L'intégration des égalités (13B) donne :

$$(14_B)\quad \begin{cases} H = E\alpha \dfrac{h^2}{6\delta r^2} \cdot S = \dfrac{E\alpha S}{C_1\eta^2 + C_2} \\ Y = \dfrac{6\delta r^2}{h^2} \cdot \zeta = (C_1\eta^2 + C_2)\zeta \\ \mathfrak{M} = HY = E\alpha M_t = E\alpha S\zeta \end{cases}$$

Les ζ et Y seront positives si P tombe au-dessus de l'axe moyen M*t*, et par suite si H est au-dessus de G. Les valeurs de H et Y tirées des (14B) permettent de calculer aisément les efforts unitaires maxima dans les sections de clef et de naissances, si l'on tient compte de ce que les distances au centre de gravité G des centres des sections de clef et de naissances, évaluées dans le sens OG, sont données (fig. 11) par les formules :

$$GO_1 = \left(1 - \frac{\sin\varphi_0}{\varphi_0}\right) r$$

$$RN = \left(\frac{\sin\varphi_0}{\varphi_0} - \cos\varphi_0\right) r = C_5 r.$$

Pour la section de clef, on aura :

$$\begin{cases} \varsigma_e = -6\,\dfrac{\left(1 - \dfrac{\sin\varphi_0}{\varphi_0}\right) r - \dfrac{h}{6} - Y}{h^2} H \\ \varsigma_i = 6\,\dfrac{\left(1 - \dfrac{\sin\varphi_0}{\varphi_0}\right) r + \dfrac{h}{6} - Y}{h^2} H \end{cases}$$

Posons encore :

$$(15_B)\quad \begin{cases} \dfrac{S}{h} = t_0 = \textit{température moyenne.} \\ \dfrac{\zeta}{h} = \varepsilon = \textit{excentricité de la distribution.} \end{cases}$$

On déduira, à l'aide de calculs faciles, en se reportant à l'équation (14B) ci-dessus :

$$\begin{cases} \varsigma_e = -E\alpha t_0 \left\{ \dfrac{1}{\delta}\left[\left(1 - \dfrac{\sin\varphi_0}{\varphi_0}\right) - \dfrac{h}{6r}\right] \cdot \dfrac{h}{r} - \varepsilon \right\} \\ \varsigma_i = E\alpha t_0 \left\{ \dfrac{1}{\delta}\left[\left(1 - \dfrac{\sin\varphi_0}{\varphi_0}\right) + \dfrac{h}{6r}\right] \cdot \dfrac{h}{r} - \varepsilon \right\} \end{cases}$$

et, pour les (8′) du chapitre Ier :

$$(16_B)\begin{cases} \varsigma_e = -\,E\alpha t_o \left(\mu_e \dfrac{h}{r} - \varepsilon\right) \\ \varsigma_i = E\alpha t_o \left(\mu_i \dfrac{h}{r} - \varepsilon\right). \end{cases}$$

Le même procédé donnera pour les sections de naissances :

$$(16'_B)\begin{cases} \varsigma'_e = E\alpha t_o \left(\mu'_e \dfrac{h}{r} + \varepsilon\right) \\ \varsigma'_i = -\,E\alpha t_o \left(\mu'_i \dfrac{h}{r} + \varepsilon\right) \end{cases}$$

Les équations (16B) et (16′B) sont parfaitement identiques aux formules données par Guidi pour une distribution linéaire (V. Chap. I, form. (11).

La température moyenne est toujours indiquée par (t_o), tandis qu'au terme $\left(\dfrac{\Delta t}{2}\right)$ on substitue le terme :

$$\varepsilon t_o = \frac{t_o \zeta}{h} = \frac{S\zeta}{h^2} = \frac{M_s}{h^2}$$

qui caractérise la désuniformité de la distribution thermique.

La dernière expression de (εt_o), c'est-à-dire $\dfrac{M_s}{h^2}$, sert au calcul des distributions dans lesquelles $t_o = 0$. Les (16B) et (16B′) qui sont une généralisation des formules de Guidi, sont des formules générales et donnent toujours la valeur des efforts unitaires, quelle que soit la distribution thermique. Il est, toutefois, important de noter que si la distribution thermique est symétrique par rapport à la fibre moyenne de l'arc, les efforts produits sont équivalents à ceux donnés par une distribution uniforme de grandeur $t_o = \dfrac{S}{h}$. Ce théorème avait déjà été donné par H. Ritter (déjà cité); il est très utile pour le calcul des efforts thermiques à réservoir vide.

4. — Variations thermiques extérieures au barrage.

Ayant ainsi préparé les formules nécessaires au calcul des efforts internes dûs à une distribution quelconque des températures, M. Ippolito reprend l'examen de l'équation différentielle fondamentale :

$$\frac{d^2t}{dx^2} = \frac{\rho c}{K} \cdot \frac{dt}{d\tau} \tag{8B}$$

Si les parements du barrage se maintiennent, par hypothèse, à des températures constantes quoique différentes entre elles, pour un laps de temps indéfini, la répartition des températures tendra asymptotiquement vers un état de régime dans lequel la température intérieure en chaque point sera indépendante du temps; et qui se traduira par l'expression :

$$\frac{dt}{d\tau} = 0.$$

Par suite :

$$\frac{d^2t}{dx^2} = 0$$

Et

$$t = ax + b \ (^1)$$

La distribution finale sera linéaire; et c'est précisément celle étudiée par Guidi. Mais, d'après ce qui vient d'être dit sur cette distribution, elle se peut admettre seulement lorsque le temps durant lequel les parements se sont maintenus à température constante est d'une durée telle que puissent être considérées comme négligeables les différences entre les valeurs effectives des températures et celles de l'état de régime vers lequel elles tendent asymptotiquement. Or, en réalité, les températures sur les parements oscillent d'une façon aussi variable que complexe... Toutefois, le problème demande à être étudié simplificativement par substitution de schémas analytiques aux variations externes.

(1) (a) et (b) étant de détermination facile avec les conditions limites.

En ce qui concerne la température atmosphérique, M. Ippolito estime qu'on peut la considérer comme résultante :

(*a*) D'une oscillation à période journalière d'allure sinusoïdale;

(*b*) D'une oscillation à période annuelle, d'allure également sinusoïdale;

c) De perturbations, plus ou moins sensibles, des oscillations périodiques précédentes.

Pour ce qui est de l'eau du réservoir, on peut la considérer, eu égard à sa grande masse et à sa chaleur spécifique, comme ayant une température journalière constante mais soumise à une oscillation annuelle sinusoïdale d'amplitude très limitée.

On perçoit de suite l'impossibilité qu'il y aurait à vouloir traiter le problème dans toute sa complexité, et la nécessité qu'il y a — pour rester dans le domaine pratique — à se limiter à l'examen des distributions typiques les plus simples, suffisantes, comme on le verra, pour donner les indications qui nous sont nécessaires.

A cet effet, M. Ippolito envisage seulement les variations sinusoïdales de l'atmosphère, en supposant constante la température de l'eau pendant la période annuelle (ce qui est parfaitement admissible, surtout à une certaine profondeur). On est ainsi reporté à deux principaux cas typiques : celui d'une température constante à l'amont et variable à l'aval avec loi sinusoïdale (réservoir plein); celui des températures variables simultanément à l'amont et à l'aval, toujours suivant la loi sinusoïdale (réservoir vide).

L'étude de ces deux cas simples doit être poursuivie pour une oscillation journalière et pour une annuelle, en admettant le principe de la superposition des effets, pour bien estimer la concomittance des 2 oscillations.

En effet, (1) malgré que ce principe ne soit, en général, point applicable aux problèmes comme celui qui nous occupe,

(1) V. Puppini, dans *Il Monitore Tecnico*, n° 32 (Milano 1922).

on peut, dans ce cas spécial, comme dans quelques autres analogues, considérer comme parfaitement valable le principe de la superposition des effets, par intervention de la loi de proportionnalité entre les flux de chaleur par unité de surface isothermique et la chute de température par unité de longueur de ligne de flux.

La mise en charge du réservoir complique, toutefois, le phénomène en raison de ce que le parement amont se trouve alternativement exposé aux températures de l'air et de l'eau. Il est clair, pourtant, que, la température de l'eau variant dans des limites restreintes et très voisines des moyennes annuelles, la distribution effective des températures ne peut qu'être intermédiaire entre les cas extrêmes que nous envisagerons, c'est-à-dire celui du réservoir en pleine charge et celui du même réservoir complètement vide.

***

Dans l'équation fondamentale (8B) entrent trois paramètres caractéristiques du matériau constitutif du barrage, c'est-à-dire le poids spécifique, la chaleur spécifique et le coefficient de transmission intérieure de la chaleur.

Le premier de ces paramètres peut être très aisément fixé dans chaque cas particulier : ses valeurs, pour les différents matériaux classiques étant bien connues.

La chaleur spécifique est plus malaisée à déterminer; toutefois, elle varie, dans des limites très restreintes, d'un matériau à l'autre; on peut même la considérer comme constante avec une approximation très suffisante.

Le coefficient (K) de transmission intérieure de la chaleur est, au contraire, non seulement très variable d'un corps à l'autre, mais, pour un même matériau, varie avec les conditions d'agrégation, de séchage, de température, d'humidité, etc. Enfin, sa détermination est très difficile, et elle l'est encore plus pour les matériaux non homogènes, comme les bétons : sa valeur moyenne variant non seulement avec

les proportions des matières composantes, mais aussi avec les modalités du malaxage, avec la proportion des vides miarolithiques que comporte la masse, etc.

Nous supposerons donc, immédiatement, que la valeur de K est invariable avec la température, hypothèse essentielle pour que la loi de superposition des effets soit applicable.

Dans le tableau XVIII ci-après sont reportées les valeurs de (ρ) et de (c), ainsi que celles de (K), déterminées, pour différentes matières au laboratoire de l'École Polytechnique de Munich, par l'ingénieur Richard Poensgen (1).

TABLEAU XVIII.

	Températures d'expérimentation	Densités	Coefficient de transmission thermique	Chaleur spécifique
* Calcaire à grain fin.....	—	2,60	0,170	0,21
* — à gros grain ...	—	2,50	0,130	0,21
* Granit et gneiss	—	2,70	0,220	0,20
Calcaire arénacé à gros grain	25°	2,00	0,080	0,22
	40°		0,085	
— arénacé à grain fin	25°	1,66	0,059	0,21
	40°		0,068	
Silice arénacée humide	20°	2,26	0,144	0,21
	40°		0,158	
— sèche.....	20°	2,25	0,111	—
	30°		0,114	
Ancienne maçonnerie de briques	29°	1,85	0,035	0,21
	47°		0,038	
Béton de ciment à 400 kgs, après 6 mois de séchage.	20°	2,18	0,065	0,21
	23°		0,066	
Béton de ciment à 190 kgs, après 15 jours de séchage	20°	2,05	0,070	0,21
	30°		0,072	
	40°		0,074	

(1) V. *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure* (12 octobre 1912).
Les données affectées d'un astérisque sont dues, toutefois, à d'autres expérimentateurs.

Dans ce tableau, comme dans tout ce qui va suivre, on a adopté les unités suivantes :

Pour les longueurs : *le décimètre*;
— poids : *le kilogramme;*
— temps : *l'heure;*
— températures : *le degré centésimal.*

5. — Distribution des températures a réservoir plein.

Dans ce cas particulier, la température amont est constante, alors que celle d'aval varie, selon la loi sinusoïdale, autour d'une valeur moyenne qui peut être supposée nulle sans rien enlever à la généralité du problème. On aura donc, si (T_e) est la demi-amplitude de l'oscillation et θ la période :

$$t_e = T_e \sin \frac{2\pi}{\theta} \cdot \tau \qquad (17_B)$$

On peut estimer que la température à l'amont est égale à la moyenne aval, c'est-à-dire également nulle. Cette hypothèse est, du reste, très proche de la réalité pour l'oscillation annuelle. Du reste, on peut superposer aux résultats une distribution linéaire de température entre les deux parements. Si l'épaisseur du barrage était infiniment grande (ou, par approximation, assez grande), l'intégrale générale de l'équation (8B) serait :

$$(18_B) \quad t = T_e \cdot e^{-\sqrt{\frac{\pi}{\theta}\frac{\rho c}{K}} \cdot x} \sin \left[\frac{2\pi}{\theta} \tau - \sqrt{\frac{\pi}{\theta}\frac{\rho c}{K}} \cdot x \right]$$

formule qui exprime la loi des oscillations amorties. La température (t), en un point situé à la distance (x) du parement aval, varie selon une loi également sinusoïdale, de même période θ; mais, à mesure que (x) augmente, l'amplitude décroît selon une loi exposantielle, tandis que la phase retarde suivant la loi linéaire.

La formule (18B) peut parfaitement être adoptée, et avec

une approximation suffisante, pour des épaisseurs sensibles, mais limitées : cela revient à négliger l'amplitude d'oscillation donnée par la formule à la distance $x = h$ du parement aval, c'est-à-dire en correspondance du parement amont.

Nous allons voir que cette amplitude est négligeable pour la période d'oscillations journalière, et que pareille négligence appliquée à la période annuelle, constitue une intervention en faveur de la stabilité. En effet, si l'on adopte la loi de la formule (18B), il importe de déterminer la valeur du paramètre unique :

$$\lambda = -\sqrt{\frac{\pi}{\theta}\,\frac{\rho c}{K}} \tag{19B}$$

qui lie entre elles la période θ, et les trois constantes physiques ρ, c, k.

Les massifs constitutifs des barrages étant presque toujours une maçonnerie à blocage avec béton de ciment, et la proportion de ciment entrant dans la composition du béton étant toujours assez élevée pour assurer l'étanchéité de la construction et obtenir une résistance remarquable, on peut adopter, en moyenne :

$$\rho = 2{,}2 \qquad c = 0{,}21 \qquad K = 0{,}065.$$

Il en résulte, pour l'oscillation journalière, la valeur :

$$\lambda = -\sqrt{\frac{3{,}14}{24}\cdot\frac{2{,}2\times 0{,}21}{0{,}065}} = -0{,}964.$$

Avec une suffisante approximation, nous admettrons désormais :

$$\lambda = -1$$

et, par suite :

$$\left\{\begin{aligned} t &= T_e \cdot e^{-x} \sin\left(\frac{\pi}{12}\cdot\tau - x\right) \\ T_x &= T_e\, e^{-x} \\ x &= \log.\frac{T_e}{T_x} \end{aligned}\right. \tag{20B}$$

où T_x est l'amplitude de l'oscillation thermique journalière à la profondeur (x) sous la retenue normale devant le parement aval.

Il est facile d'établir à quelle distance de ce parement aval on peut négliger l'effet de l'oscillation journalière. Si l'on admet que la température extérieure varie de $+ 10^o$ à $- 10^o$ autour d'une valeur moyenne, égale à zéro, on aura : $T_e = 10$; et, si l'on admet qu'on puisse sacrifier aux effets pratiques, une variation d'un degré, au-dessous ou au-dessus de la moyenne, on déduira que le phénomène thermique journalier s'éteint pratiquement à la profondeur :

$$x = \log.10 = 2{,}3\ dcm. = 0{,}23\ m.$$

c'est-à-dire à moins de 25 centimètres au-dessous de la surface du barrage, profondeur à laquelle l'oscillation diurne ne se fait plus pratiquement sentir. On peut calculer, avec la formule (18B), les valeurs de $\frac{t}{T_e}$ pour différentes valeurs du temps et de λx.

Les résultats sont consignés dans le tableau XIX ci-après, calculés pour une moitié de la période et pour λx variable entre (0) et (-3).

TABLEAU XIX.

$\frac{2\pi}{\theta}\tau$	Valeurs de $\frac{t}{T_e}$ pour :						
	$\lambda x = 0$	$\lambda x = -0{,}5$	$\lambda x = -1$	$\lambda x = -1{,}5$	$\lambda x = -2$	$\lambda x = -2{,}5$	$\lambda x = -3$
0	0	—0,291	—0,310	—2,223	—0,123	—0,049	—0,007
1/8	0,707	0,171	—0,078	—0,146	—0,127	—0,081	—0,040
2/8	1	0,532	0,199	0,016	—0,056	—0,066	—0,050
3/8	0,707	0,582	0,360	0,169	0,047	—0,012	—0,030
$\frac{T_x}{T_e} =$	1	0,606	0,368	0,223	0,135	0,082	0,050
x en $m.$ Période diurne	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30
x en $m.$ Période annuelle	0	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00	6,00

Pour l'autre moitié de la période, il suffit de changer les signes.

Dans les dernières lignes sont donnés également les rap-

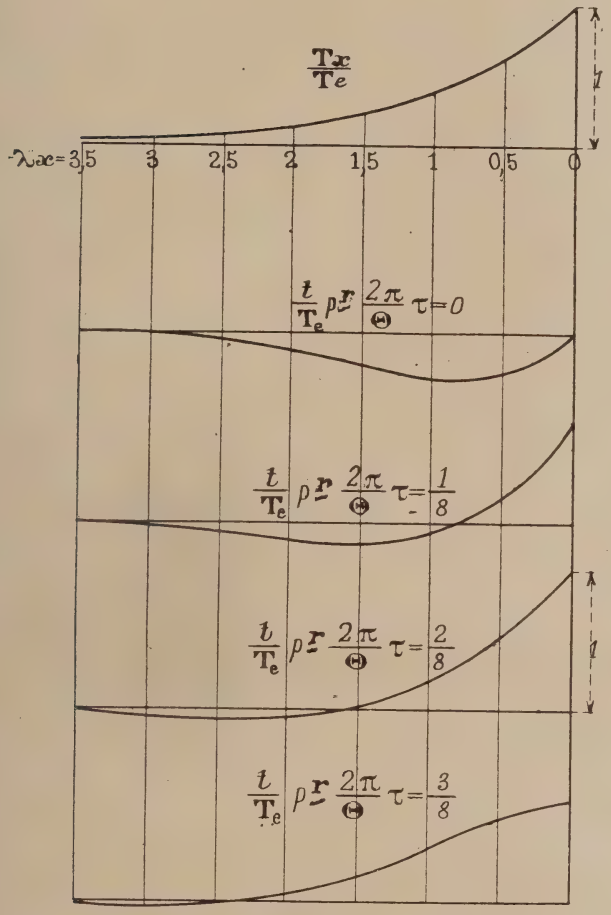


Fig. 13.

ports $\frac{T_x}{T_e}$ et les valeurs de x pour $\lambda = -1$ et $\lambda = -0{,}05$.

Les données de ce tableau XIX ont alors permis de construire la figure 13, sur laquelle on constate immédiatement que

le cas le plus défavorable est celui pour lequel $\frac{2\pi}{\theta}\tau = \frac{2}{8}$, la distribution étant la moins uniforme, alors que la température moyenne t_0 est à peine plus petite que sa valeur maxima.

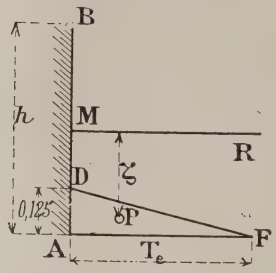


Fig. 14.

En substituant à la courbe du graphique le segment rectiligne FD (fig. 14) — dans lequel AD $= -\lambda x = 1{,}25$ et AF $= T_e$ — on peut aisément calculer, à l'aide des formules (16B) et (16'B) les efforts correspondants.

Dans le cas particulier de l'oscillation journalière qui nous occupe, (λ) étant égal à 1, le point D correspondrait à une profondeur de 12,5 centimètres à peine au-dessous du parement aval du barrage. Les efforts unitaires produits par une pareille distribution sont, dès lors, facilement calculables à l'aide des formules (16B) et (16'B), en remarquant (fig. 14) que :

$$\begin{cases} S = \frac{1}{2}.0{,}125.\ T_e \\ \zeta = \frac{1}{3}\ .\ 0{,}125 - \frac{h}{2} \end{cases}$$

et, par suite :

$$t_0 = 0{,}0625\ \frac{T_e}{h}$$

$$\varepsilon = \frac{0{,}0417}{h} - \frac{1}{2}$$

Supposons, par exemple : $h = 1\ m.$, $T_e = 10^o$. On aura :

$$t_o = 0{,}625 \qquad \varepsilon = -0{,}458$$

et, dans un cas défavorable pour lequel on aurait :

$$\frac{h}{r} = \frac{1}{5}\ ;\quad 2\varphi_o = 140^o;\quad E\alpha = 2{,}6,$$

l'effort maximum aurait lieu pour T_e négatif, avec :

$$\varsigma'_e = 2{,}6 \times 0{,}625 \left(\frac{3{,}68}{5} + 0{,}458\right) = 1{,}94 \text{ kg. cm}^2$$

Cette valeur décroît très rapidement à mesure que l'épaisseur croît, si le rapport $\left(\frac{h}{r}\right)$ se maintient constant. Par contre, elle décroît non moins rapidement, à mesure que l'amplitude croît et que le rapport $\left(\frac{h}{r}\right)$ décroît.

On voit, par exemple, que les efforts dus aux variations thermiques journalières, dans les conditions les plus défavorables, n'atteignent pas la valeur de 2 kg. par cm^2. D'autre part. les variations thermiques intéressent une couche superficielle très mince. On peut donc, dans la plupart des cas, les négliger complètement.

L'oscillation annuelle a, par contre, une importance très appréciable. On a en effet :

$$\lambda = -\sqrt{\frac{\pi}{365 \times 24} \cdot \frac{2{,}2 \times 0{,}21}{0{,}065}} = -0{,}05.$$

et par suite :

$$(21_B) \quad \begin{cases} t = T_e \, e^{-0{,}05.\,x} \sin\left(\frac{\pi}{365 \times 12}\tau - 0{,}05.\,x\right) \\ T_x = e^{-0{,}05.\,x} \\ x = 20.\log.\frac{T_e}{T_x}. \end{cases}$$

Dans ce cas, pour que (T_x) soit réduit à la dixième partie de (T_e), il faut envisager une distance du parement aval vingt fois plus grande que dans le cas précédent. On arrive ainsi à une épaisseur d'au moins 4,60 *m.*, et si l'épaisseur du barrage est très inférieure, l'oscillation thermique sur le parement amont, ne pourra pas être négligée.

Par exemple, avec $x = 1$ *m.* $= 10$ *dcm.*

$$T_x = e^{-0{,}05} T_e = 0{,}60\, T_e$$

et pour $x = 2\ m. = 20\ dcm.$

$$T_x = e^{-1}.\ T_e = 0{,}37\ T_e.$$

Ayant supposé que la température de l'eau dans le réservoir est sensiblement constante, l'adoption de la formule (21B) est toujours favorable à la stabilité, parce que les amplitudes (T_x), aux diverses distances du parement aval, doivent tendre vers zéro pour $x = h$, décroissent plus rapidement qu'avec la loi de la formule (21B).

Le tableau XIX et le diagramme de la figure 13 peuvent être facilement utilisés pour tracer les épures des distributions thermiques. Et au moyen de ces dernières, par des opérations très simples, on peut déduire les valeurs de t_0 et ε, à substituer dans les formules (16B) et (16'B).

Si, avec peut-être moins d'exactitude, mais avec une hypothèse toute en faveur de la stabilité, on voulait considérer, au lieu de la distribution instantanée de la température, celle que l'on aurait si, en chaque point, se réalisait, simultanément, la valeur maximum (T_x), on aurait :

$$t = e^{\lambda x}.\ T_e$$

et, par des intégrations faciles, on peut alors calculer :

$$S = \frac{T_e}{\lambda} \cdot \left(e^{\lambda h} - 1 \right)$$

$$M_e = \frac{1}{2} \cdot \frac{T_e}{\lambda} \left[\left(e^{\lambda h} - 1 \right)(h+1) + 2h \right]$$

$$\zeta = \frac{h+1}{2} + \frac{h}{e^{\lambda h} - 1}$$

d'où les valeurs de t_0 et ε à substituer dans (16_B) et ($16'_B$) :

$$t_0 = \frac{e^{\lambda h} - 1}{\lambda h}\ T_e$$

$$\varepsilon = \frac{h+1}{2h} + \frac{1}{e^{\lambda h} - 1}$$

6. — Distribution des températures a réservoir vide.

A réservoir vide, la répartition des températures dépend de la loi de variation sur les deux parements. Une simple analyse peut être effectuée dans l'hypothèse où la température est égale, sur le parement, en chaque instant, et qu'elle varie dans le temps selon une loi sinusoïdale.

En négligeant l'effet des dispersions sur le pourtour, on peut étudier la propagation thermique en la comparant à celle que l'on aurait dans une dalle d'épaisseur (h), indéfiniment étendue en largeur et en longueur.

Les surfaces isothermiques sont, à tout instant, des plans parallèles aux parements, tandis que le plan médian, également éloigné des parements, est un plan de symétrie dans le phénomène, lequel est caractérisé par la distribution thermique le long d'une droite normale à ce plan.

L'équation différentielle est encore :

$$(8_B) \qquad \frac{d^2t}{dx^2} = \frac{\rho c}{K} \cdot \frac{dt}{d\tau}$$

dans laquelle (x) représente la distance d'une surface plane isothermique du plan de symétrie (médian). Les conditions-limites seront :

$$(22_B) \qquad t = T_a \sin \frac{2\pi}{\theta} \tau, \text{ pour } x = \pm \frac{h}{2} \cdot$$

A l'état de régime, on peut admettre que la température, en chaque point intérieur, de la dalle, oscille selon une loi sinusoïdale de même période que sur les parements, mais avec une amplitude moindre et une phase retardée : données qui sont exclusivement fonction de la position de chaque point, et par suite, du paramètre (x). On essaiera donc de satisfaire l'équation (8B) avec une fonction de la forme :

$$(23_B) \qquad t = T_a \sin \left(\frac{2\pi}{\theta} \tau + \varphi_a \right)$$

dans laquelle l'amplitude (T_x) et la phase (φ_x) sont des fonctions de la seule variable (x). Il est aisé de reconnaître que l'expression :

$$(24_B) \qquad t = T_0 e^{\lambda\left(\frac{h}{2} - x\right)} \sin\left[\frac{2\pi}{\theta}\tau + \lambda\left(\frac{h}{2} - x\right)\right]$$

satisfait à l'équation (8B), et à une des conditions limites de la (22_B), pour le seul cas, cependant, où $x = +\frac{h}{2}$.

Dérivant, en effet, l'équation(24B), et substituant dans la (8B) cette dernière se trouve vérifiée, pourvu que l'on ait :

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{\pi}{\theta}\cdot\frac{\rho c}{K}}.$$

Et puisque les amplitudes thermiques décroissent avec x, il faudra prendre, pour λ, le signe négatif. L'équation (23B) est donc une fonction intégrale, mais valable seulement pour une moitié de la dalle; et, pour l'autre moitié, la symétrie du phénomène nous donnera la fonction intégrale :

$$t = T_0 e^{\lambda\left(\frac{h}{2} + x\right)} \sin\left[\frac{2\pi}{\theta}\tau + \lambda\left(\frac{h}{2} + x\right)\right]$$

qui vérifie la (8B) ainsi que la (22B) pour le seul cas où $x = -\frac{h}{2}$.
Introduisons la fonction :

$[x]$ = valeur absolue de x.

Nous pourrons écrire, pour toute la dalle :

$$(25_B) \quad t = T_0 e^{-\sqrt{\frac{\pi}{\theta}\cdot\frac{\rho c}{K}}\left(\frac{h}{2} - [x]\right)} \sin\left[\frac{2\pi}{\theta}\tau - \sqrt{\frac{\pi}{\theta}\cdot\frac{\rho c}{K}}\left(\frac{h}{2} - [x]\right)\right]$$

La fonction $[x]$, généralement continue, présente, cependant, un point de discontinuité pour $x = 0$, où la dérivée : $\frac{d[x]}{dx}$ comporte, à droite et à gauche, deux valeurs distinctes $+1$ et -1. Par voie de conséquence, la (25B), qui est certainement une intégrale de la (8B), ne saurait satisfaire au

caractère physique du problème. En effet, si, pour $x = 0$, $\frac{dt}{dx} \neq 0$ (1), on devrait avoir une accumulation ou une soustraction de quantités définies de chaleur dans une couche d'épaisseur infinitésimale, autour du point $x = 0$; ce qui équivaudrait à supposer, dans cette couche, une chaleur spécifique infiniment grande : hypothèse absurde...

De la (25B) on peut extraire la dérivée $\frac{dt}{dx}$ pour $x = 0$:

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)_{x=o} = \pm T \cdot \lambda e^{\frac{1}{2}\lambda h} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\theta}\tau + \frac{1}{2}\lambda h\right)$$

Cette dérivée décroît rapidement, en valeur absolue, à mesure que (h) croît, puisque λ est toujours, par essence, une quantité négative. Pour des épaisseurs très grandes de la dalle, la dérivée $\frac{dt}{dx}$, au point $x = 0$, devient très petite; les deux branches de la courbe se rencontrent dans le plan moyen de telle manière que les deux tangentes sont bien près de coïncider en prolongements. Cette circonstance se présentant, on peut, étant donné le caractère démonstratif de semblable détermination, retenir que la formule (25B) fournit une solution suffisamment exacte du problème; solution-limite, du reste, et d'autant plus exacte que la dalle est plus épaisse.

A noter encore, que la distribution effective des températures ne peut pas s'éloigner beaucoup de l'expression qu'en donne la formule (25B); surtout dans le voisinage immédiat des parements, où ont lieu, précisément, les oscillations les plus notables.

Enfin, remarquons que la similitude entre les expressions (25B) et (18B) montre que, dans un barrage d'épaisseur suffisamment grande, la distribution des températures dans la

(1) Ainsi qu'il arrive lorsque la fonction t (x), symétrique par rapport à (x) est également continue pour $x = 0$.

moitié aval de cette épaisseur est, pour ainsi dire, indépendante de la hauteur de l'eau dans le réservoir.

On peut donc, dès maintenant, déterminer l'épaisseur minimum (h) pour laquelle la formule (25B) est applicable, étant donnée la valeur maximum de $\frac{dt}{dx}$ (soit $\frac{1}{n}$) qu'on se propose de négliger.

On aura, en valeur absolue :

$$T_e \, \lambda e^{\frac{1}{2}\lambda h} = \frac{1}{n}$$

d'où : $$h = -\frac{2}{\lambda} \log n \, \lambda T_e$$

En pratique, M. Ippolito adopte $n = 50$, soit $\frac{1}{n} = 2\ \%$.

On a alors :

a) Pour l'oscillation journalière, en posant $T_e = 10^o$ (soit 20 degrès d'oscillation totale) :

$$h = m.\ 1{,}24.$$

b) Pour l'oscillation annuelle, en posant $T_e = 20^o$ (soit 40 degrés d'oscillation totale) :

$$h = m.\ 15{,}60.$$

Pour des épaisseurs moindres, la formule (25B) donne une approximation trop grossière.

Reprenant, de nouveau, l'équation (23B) dans laquelle, comme nous l'avons dit, T_x et φ_x sont fonctions de la seule variable (x) et, en outre, symétriques par rapport à x, nous pouvons, par dérivation de la (23B), obtenir les valeurs de $\frac{d^2t}{dx^2}$ et $\frac{dt}{d\tau}$ et les porter dans l'équation fondamentale (8B).

En groupant les termes par fonctions circulaires, on aura, en écrivant, plus simplement, (T) et (φ) au lieu de (T_x) et (φ_x) :

$$\left[\frac{d^2T}{dx^2} - T\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2\right] \sin\left(\frac{2\pi}{\theta}\tau + \varphi\right) + \left[2\frac{dT}{dx}\cdot\frac{d\varphi}{dx} + T\frac{d^2\varphi}{dx^2} - \frac{2\pi\rho c}{\theta K} T\right] \cos\left(\frac{2\pi}{\theta}\tau + \varphi\right) = 0.$$

Puisque cette égalité doit être satisfaite pour n'importe quelles valeurs de τ, on devra avoir simultanément :

$$(26_B)\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^2T}{dx^2} - T\left(\dfrac{d\varphi}{dx}\right)^2 = 0 \\ 2\dfrac{dT}{dx}\cdot\dfrac{d\varphi}{dx} + T\dfrac{d^2\varphi}{dx^2} - \dfrac{2\pi\rho c}{\theta K}T = 0. \end{array}\right.$$

Système d'équations différentielles simultanées dans les deux fonctions (T) et (φ), dont l'intégration fournirait les expressions finies de ces fonctions satisfaisant à l'équation différentielle (8_B) (1).

Par dérivations et substitutions successives, éliminons la fonction φ des (26_B).

Posant, comme précédemment, $\lambda = -\sqrt{\dfrac{\pi}{\theta}\dfrac{\rho c}{K}}$, et exprimant par T^I, T^{II}, T^{III}, etc., les dérivées successives de (T) par rapport à (x), des calculs faciles donnent :

$$(27_B) \qquad [TT^{III} + 3\,T^I T^{II}]^2 - 16.\ \lambda^4 T^3 T^{II} = 0.$$

---

(1) La résolution du système (26_B), aux dérivées totales, ne se présente pas, cependant, plus facile que celle de l'équation (8_B) aux dérivées partielles. On peut, toutefois, par analogie avec ce qu'a fait Fourier pour la (8_B), en tenter une intégration en séries.

Il est notoire, en effet, que l'intégrale générale de la (8_B) a été posée, par Fourier, sous la forme :

$$t = \sum_{i=1}^{i=\infty} e^{-m_i^2 \frac{K}{\rho c}\tau}\cdot(A_i \sin m_i x + B_i \cos m_i x)$$

Dans le cas qui nous occupe, de par la symétrie du phénomène, on aurait, plus simplement :

$$t = \sum_{i=1}^{i=\infty} B_i .\ e^{-m_i^2 \frac{K}{\rho c}}\cdot \cos m_i x,$$

et, avec les conditions aux limites qui sont :

$$t = T_e \sin\frac{2\pi}{\theta}\tau \text{ pour } x = \pm\frac{h}{2} \text{ et pour chaque } (\tau),$$

on peut obtenir, en prenant, une fois, les valeurs de τ pour lesquelles $t = 0$ (soit $\tau = 0, \dfrac{\theta}{2}, \dfrac{2\theta}{2}, \dfrac{3\theta}{2}, \ldots$) et, une autre fois, les valeurs de τ pour lesquelles $t = T_e$ (soit $\tau = \dfrac{\theta}{4}, \dfrac{3\theta}{4}, \ldots$) autant que l'on désire d'équations de condition; mais, elles sont en nombre infini, et pratiquement insolubles...

Cette équation est du 3e degré et ne peut s'intégrer en termes finis; nous en essaierons une intégration en série.

En développant T en série par la formule de Mac Laurin, et appelant T^{I}_{0}, T^{II}_{0}, etc..., les valeurs des dérivées successives de (T), calculées pour $x = 0$, on a :

$$T = T_o + x\,T_o^{I} + \frac{x^2}{2!}\,T_o^{II} + \frac{x^3}{3!}\,T_o^{III} + \ldots$$

En dérivant successivement les (27B), on peut exprimer les dérivées successives de la (T) en fonction de T_o, T_o^{I}, T_o^{II}, et dans l'équation ci-dessus resteront seulement les valeurs de T_0, T^{I}_{0}, T^{II}_{0} qui seront à considérer comme les constantes d'intégration et à déterminer par les conditions-limites.

Le calcul est simplifié du fait de la symétrie de la fonction T, pour laquelle les dérivées d'ordre impair seront toutes nulles pour $x = 0$.

En outre, les calculs, effectués par M. Ippolito, jusqu'à la seizième dérivée, montrent que sont également nulles les dérivées d'ordre 2, 6, 10, 14, etc.

Les autres seront exprimées en fonction de la seule valeur T_0. Les résultats sont les suivants :

$$T_o^{IV} = 8\,\lambda^4\,T_o\,;\quad T_o^{VIII} = -\,33\,(8\lambda^4)^2.\,T_o\,;$$
$$T_o^{XII} = 16339.\,(8\lambda^4)^3.\,T_o\,;\quad T_o^{XVI} = -\,36744687\,(8\lambda^4)^4.\,T_o$$

Et la série devient :

$$(28_B)\qquad \frac{T}{T_o} = 1 + \frac{1}{4!\times 2}\,(2\lambda x)^4 - \frac{33}{8!\times 4}\,(2\lambda x)^8 + \\ + \frac{16339}{12!\times 8}\,(2\lambda x)^{12} - \frac{36.744.687}{16!\times 16}\,(2\,\lambda x)^{16} + \ldots\,;$$

soit, en développant les calculs numériques :

$$(28'_B)\qquad \frac{T}{T_o} = 1 + 0{,}02083\,(2\lambda x)^4 - 0{,}0002046\,(2\lambda x)^8 + 0{,}000\,004264\,(2\lambda x)^{12} - 0{,}000\,000\,1173.\,(2\lambda x)^{16} + \ldots\ldots$$

ou encore :

$$(28''_B)\qquad \frac{T}{T_o} = 1 + \frac{1}{3}\,(\lambda x)^4 - 0{,}05238.(\lambda x)^8 + 0{,}01747.\,(\lambda x)^{12} - \\ - 0{,}007686\,(\lambda x)^{16} + \ldots$$

La valeur de (T_0) s'obtient, en posant $T = T_*$ pour $x = \pm \frac{h}{2}$.

La série (28B) est très rapidement convergente pour $\lambda x < \frac{1}{2}$ en valeur absolue, comme on le voit très bien à l'examen de la formule (28'B), et converge encore assez vite pour $\lambda x = 1$ en valeur absolue (formule (28''B). Dès lors, en raison du caractère approché de la recherche, on peut très bien adopter la fonction :

$$\frac{T}{T_0} = 1 + \frac{1}{3}(\lambda x)^4 \tag{29B}$$

dans tout l'intervalle pour lequel :

$$[\lambda x] \leq 1$$

parce que, au pis aller, pour $\lambda x = -1$, la somme des trois derniers termes négligés est à peine égale à 3 % des deux termes figurant dans la (29B), alors que, vu l'alternance des signes, la valeur effective de la série est certainement comprise entre la somme des deux premiers termes et celle des trois premiers.

En retenant la formule (29B) comme expression de la fonction T, on peut déterminer la phase φ correspondante par l'intégration de la première des (26B).

En effet, de la (29_B), on déduit :

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 4\,T_0\,\lambda^4 x^2.$$

En substituant, dans la première des (26B), celle-ci devient :

$$4\,T_0\,\lambda^4 x^2 - T_0\left[1 + \frac{1}{3}\lambda^4 x^4\right]\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 = 0$$

d'où

$$\frac{d\varphi}{dx} = \pm \frac{2\,\lambda^2 x}{\sqrt{1 + \frac{1}{3}\lambda^4 x^4}}$$

Une intégration donne :

$$\varphi = \pm\sqrt{3.}\,\log\left[\frac{(\lambda x)^2}{\sqrt{3}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3}(\lambda x)^4}\right] + \text{Cte.}$$

Avec les conditions limites $\left(\varphi_{\frac{h}{2}} = 0\right)$, on a :

$$\text{Cte} = \mp \sqrt{3.}\ \log \left[\frac{\left(\lambda \frac{h}{2}\right)^2}{\sqrt{3}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3}\left(\lambda \frac{h}{2}\right)^4} \right]$$

Puisque φ doit être négative, et que :

$$\frac{T_e}{T_o} = 1 + \frac{1}{3}\left(\lambda \frac{h}{2}\right)^4$$

pour laquelle :

$$T_o = \frac{T_e}{1 + \frac{1}{3}\left(\lambda \frac{h}{2}\right)^4}$$

Et ainsi, l'expression approchée de la température en un point quelconque peut s'écrire :

$$(30_B) \qquad t = T_e \frac{1 + \frac{1}{3}(\lambda x)^4}{1 + \frac{1}{3}\left(\lambda \frac{h}{2}\right)^4} \sin \left\{ \frac{2\pi}{\theta} \tau + \sqrt{3.}\ \log \frac{(\lambda x)^2 + \sqrt{3 + (\lambda x)^4}}{\left(\lambda \frac{h}{2}\right)^2 + \sqrt{3 + \left(\lambda \frac{h}{2}\right)^4}} \right\}$$

D'une manière analogue à celle adoptée pour la (25B) on peut établir la valeur maximum de l'épaisseur au-dessus de laquelle la loi (30B) n'est pas applicable; c'est-à-dire la valeur de (h) pour laquelle $\lambda \frac{h}{2} = -1$.

On obtient, alors, en se reportant aux valeurs de (λ) déjà calculées :

a) Pour l'oscillation journalière :

$$h = m.\ 0{,}20.$$

b) Pour l'oscillation annuelle :

$$h = m.\ 4{,}00.$$

Pour des épaisseurs plus grandes, les (28B) et (29B) ne sont

plus applicables, parce que la série devient d'abord trop lentement convergente, puis indéterminée, et la valeur de la somme des (n) premiers termes oscille, au départ de (n), autour d'une valeur imprécise avec des écarts toujours plus considérables. Il y a donc un intervalle entre *m.* 0,20 et *m.* 1,24 pour la période journalière et entre *m.* 4 et *m.* 15,60 pour celle annuelle, dans lequel on ne peut déterminer, par le procédé indiqué, la loi approximative des variations.

Toutefois, il y a lieu d'observer que, dans la pratique des constructions, pour pouvoir établir un calcul des efforts thermiques, il faut qu'il s'agisse d'ouvrages d'une épaisseur non excessive : voûtes de ponts, barrages en arc, etc.

Des constructions par trop épaisses, comme les barrages à gravité, par exemple, ne peuvent pas, en l'état de la question, être soumises facilement à un semblable calcul; du reste, pour de tels ouvrages, la recherche des distributions intérieures de température est sans grande importance.

Ici, M. Ippolito fait remarquer que l'étude de ce paragraphe peut parfaitement s'appliquer aux voûtes des ponts et des viaducs dans lesquels les tympans sont élégis par des voûtelettes transversales et où l'extrados est, de ce fait, soumis à la température atmosphérique. Pour ces voûtes et pour les barrages en arc d'une certaine importance, les épaisseurs sont presque toujours comprises entre 1 *m.* et 4 *m.* On peut alors adopter la loi (25B) pour les oscillations journalières et la loi (30B) pour celles annuelles.

Les deux sont symétriques par rapport à la ligne moyenne de chaque section transversale, et donnent, par suite, — ainsi qu'il résulte du paragraphe précédent — un effet semblable à celui d'une distribution uniforme ayant pour valeur moyenne :

$$T_m = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} t \, dx.$$

Substituons aux (t) les valeurs maxima (T), substitution qui est toute en faveur de la stabilité; on aura, pour le cas de la loi (30_B) :

$$T = T_e \frac{1 + \frac{1}{3}(\lambda x)^4}{1 + \frac{1}{3}\left(\lambda \frac{h}{2}\right)^4},$$

et, par suite, en intégrant :

$$(31_B) \qquad T_m = T_e \frac{1 + \frac{1}{15}\left(\lambda \frac{h}{2}\right)^4}{1 + \frac{1}{3}\left(\lambda \frac{h}{2}\right)^4} = \alpha_1 T,$$

avec :

$$(31'_B) \qquad \alpha_1 = \frac{1 + \frac{1}{15}\left(\lambda \frac{h}{2}\right)^4}{1 + \frac{1}{3}\left(\lambda \frac{h}{2}\right)^4}.$$

Par analogie, pour la loi (25_B), on a :

$$T = T_e . e^{\lambda\left(\frac{h}{2} - [x]\right)}$$

et, par intégration :

$$(32_B) \qquad T_m = T_e \frac{e^{\lambda \frac{h}{2}} - 1}{\lambda \frac{h}{2}} = \alpha_2 T,$$

avec :

$$(32'_B) \qquad \alpha_2 = \frac{e^{\lambda \frac{h}{2}} - 1}{\lambda \frac{h}{2}}.$$

L'effet thermique peut donc être évalué, en réduisant, à l'aide d'un coefficient (α_1) ou (α_2), les efforts qu'on aurait si l'oscillation de la température dans chaque point était égale à l'oscillation moyenne extérieure.

Sur la figure 15 ci-après les courbes représentatives des

coefficients (α_1) et (α_2) pour des valeurs de $\left(\lambda \frac{h}{2}\right)$ variant de zéro à — 10 sont figurées en trait plein pour la seule partie dans laquelle elles sont applicables; en pointillé pour le reste de leur tracé. On remarque, immédiatement, que la courbe (α_1) tend asymptotiquement vers la valeur 0,2, tandis que la courbe (α_2) se rapproche de la valeur zéro, à mesure que le terme $\left(\lambda \frac{h}{2}\right)$ croît indéfiniment, en valeur absolue.

Posons :

(33B) $$T_m = \alpha T,$$

dans laquelle : $\alpha = f\left(\lambda, \frac{h}{2}\right)$ représente la valeur effective du coefficient de réduction dans l'hypothèse que la distribution des températures considérée soit la réelle et non une distribution fictive approchée. On peut déduire de ce qui précède, et de l'examen de la figure 15, que la courbe (α) coïncide presque exactement avec la courbe (α_1) dans le trait AB, et avec la courbe α_2 dans la partie CD et au-delà de D jusqu'à — ∞.

On ne connaît pas le tracé de la courbe α dans la partie moyenne BC, toutefois, en raison de la continuité du phénomène, et puisque la courbe (α) doit se raccorder, en B et C, respectivement aux courbes (α_1) et (α_2), on peut présumer que son tracé sera sensiblement celui figuré en tireté sur la figure 15. Et finalement, le diagramme complet de (α) sera représenté par les deux lignes en traits pleins AB et CD raccordées par la partie tiretée BC (1).

---

(1) De l'examen de la figure 15 ressort nettement que si l'on adoptait la fonction (α_1) pour chaque $\left(\lambda \frac{h}{2}\right)$, on aurait des résultats assez insuffisants dans la partie BE du graphique, alors que, dans la partie située à droite de E, on aurait, par contre, des résultats excessifs.

Vice-versa, en adoptant la (α_2), les résultats seraient insuffisants dans la partie AF, et exagérés dans la partie FE, soit à droite de F.

Assez légitime, toutefois, semble l'adoption de la (α_1) pour $\lambda \frac{h}{2} < 1{,}5$ en

Avec les valeurs ainsi déterminées pour le coefficient (α) et pour toutes les valeurs de $\left(\lambda \frac{h}{2}\right)$, M. Ippolito a établi le tableau suivant, à l'aide duquel le calcul de l'effort thermique

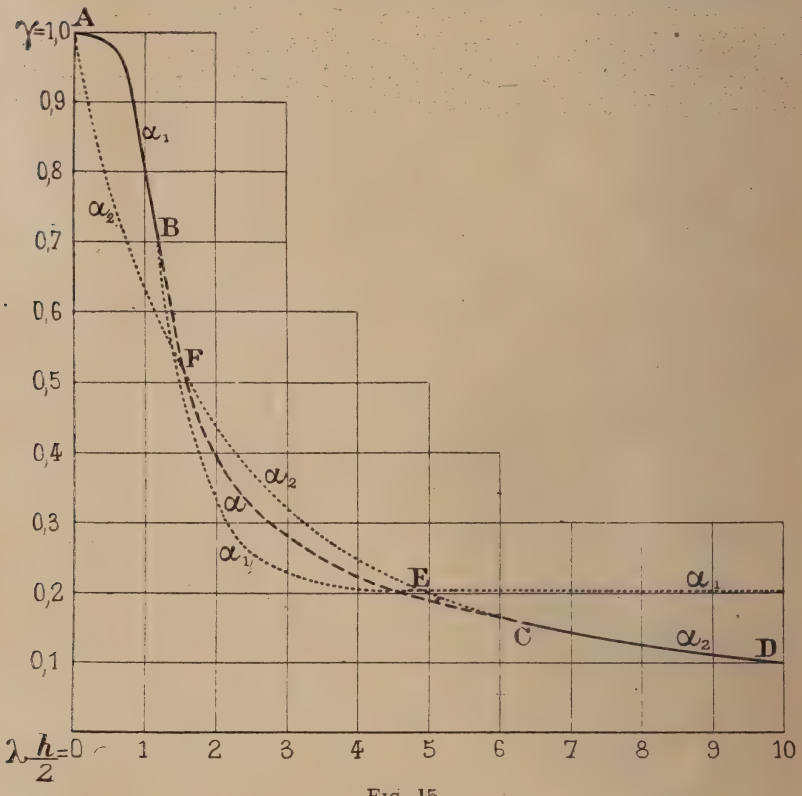


FIG. 15.

dû aux variations de température simultanées sur les deux parements est immédiat.

Dans ce tableau XX figurent directement les épaisseurs, exprimées en mètres, dans l'hypothèse d'une oscillation jour-

---

valeur absolue, et de (α_2) pour $\lambda \frac{h}{2} > 5$ en valeur absolue, avec, dans la partie intermédiaire, un coefficient $\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$.

TABLEAU XX.

$-\lambda\frac{h}{2}$		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,5	2	2,5
h en m.	Période diurne	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20	0,30	0,40	0,50
	Période annuelle	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00	2,40	2.80	3,20	3,60	4,00	6,00	8,00	10,00
$\alpha = \frac{T_m}{T_e}$		1,000	0,999	0,998	0,993	0,984	0,967	0,941	0,904	0,856	0,800	0,515	0,379	0,313

$-\lambda\frac{h}{2}$		3	3,5	4	5	6	8	10	12	14	16	18	20	40
h en m.	Période diurne	0,60	0,70	0,80	1,00	1,20	1,60	2,00	2,40	2,80	3,20	3,60	4,00	8,00
	Période annuelle	12,00	14,00	16,00	20,00	24,00	32,00	40,00	48,00	56,00	64,00	72,00	80,00	160,00
$\alpha = \frac{T_m}{T_e}$		0,273	0,245	0,227	0,199	0,166	0,125	0,100	0,083	0,071	0,062	0,055	0,050	0,025

nalière pour laquelle $\lambda = -1$, et d'une oscillation annuelle pour laquelle $\lambda = -0{,}05$.

A titre d'exemple, supposons un barrage en arc de 2 *m.* d'épaisseur. On a $\alpha = 0{,}1$ pour l'oscillation journalière, et $\alpha = 0{,}984$ pour l'oscillation annuelle. Si la première est de 20° au maximum, et la seconde de 40° (valeurs excessives dans la plupart des cas, parce que, correspondant à une différence invraisemblable de 60° entre maximum et minimum absolus), on a, pendant la période journalière :

$$T_m = 0{,}1 \times 10 = 1°$$

dans la période annuelle :

$$T_m = 0{,}984 \times 20 = 19°, 6.$$

Au total, il faudra donc tenir compte d'une oscillation de 20° 6, en plus ou en moins de la moyenne, c'est-à-dire d'un écart total, possible, de 41° 2, au lieu de celui de 60° qu'on aurait, entre la température maxima et la minima absolues, si l'on ne tenait compte de la distribution effective des températures.

Les efforts seront alors réduits dans la même proportion, c'est-à-dire aux deux tiers environ.

Si le barrage avait, au contraire, 8 *m.* d'épaisseur, on aurait dans les hypothèses précédentes :

$$T_m = 0{,}025 \times 10 = 0°, 2$$
$$T_m = 0{,}379 \times 20 = 7°, 6.$$

pour les deux périodes; avec une oscillation totale de 7° 8 en plus ou moins de la moyenne. Les efforts seraient réduits dans le rapport :

$$\frac{2 \times 7{,}8}{60},$$

c'est-à-dire à un quart environ.

7. — Phénomènes thermiques dus a la prise du ciment.

Un autre phénomène thermique, d'une importance remarquable et d'autant plus accentuée que l'épaisseur de la construction est plus grande, est le dégagement de chaleur qui se produit pendant la prise du ciment.

Le phénomène a été constaté, pour la première fois, en 1895, par Rébaucourt, qui, à la suite d'une longue série d'expériences, établit que l'augmentation de température commence à se produire dès l'origine de la prise, et qu'elle est d'autant plus faible que la prise est plus lente (1).

Dans le laboratoire de l'Université de Lehigh (Iowa), on mesura la température au centre d'un cube de 0,20 *m.* de côté, constitué par du mortier de ciment dosé à 1 : 3. Après 18 heures de prise, la température atteignit 71°, alors que la température ambiante était de 21°. M. J.-E. Howord (2) estime, de son côté, que l'augmentation de température croît avec les dimensions du bloc de béton considéré, car, avec des mortiers de ciment pur, il réussit à obtenir des augmentations de température atteignant jusqu'à 100°.

Des expériences très remarquables, sur ce sujet, ont été effectuées, en Amérique, avec mesure directe des températures dans l'intérieur de grands massifs de maçonnerie de béton; et c'est ainsi que furent faites les intéressantes constatations ci-après :

Dans le barrage de Boonton et dans celui d'Arrow-Rock, sur lesquels nous aurons l'occasion de revenir, on a constaté des augmentations de température atteignant jusqu'à 40° dans le premier et pas plus de 20° dans le second. Il convient d'ailleurs de remarquer que, dans ce dernier, le ciment n'entre dans la masse que dans des proportions assez faibles n'attei-

(1) Com. des *Méth. d'Essai des Matériaux de Constr.*, 1895.

(2) Taylor et Thompson : *Treatise on concrete, plain and reinforced*, 1908.

gnant pas 1/13 du volume total de l'ouvrage, et que les mesures y furent effectuées un certain temps après le bétonnage.

Au barrage de Kensico (1), M. P.-T. Seabury a constaté des élévations de température atteignant jusqu'à 46° (ces mesures s'entendant toujours en degrés centigrades), avec un béton dans lequel le ciment représente environ 1/9 de la masse totale. La température maximum fut constatée, selon les endroits, de 7 à 28 jours après le bétonnage.

A Spaulding (2), on plaça deux couples thermoélectriques, le premier près du parement, le deuxième dans le centre du massif. Onze jours après le bétonnage, l'élévation de température était de 12° près du parement, et de 24° à l'intérieur du massif; deux mois après, l'élévation, près des parements, avait disparu, tandis qu'au centre elle était encore de 10°, et décroissait ensuite, à raison de 1°,5 par semaine.

Enfin, dans le barrage de Rock-Creek, qui ne présente qu'une faible épaisseur — étant du type à arches multiples — l'élévation de température présentait, au centre, un maximum de 10° après 18 heures de prise, puis décroissait très vite

Après avoir rappelé, pour mémoire, les observations relatées ci-dessus, M. Ippolito fait observer que l'incertitude, et même la discordance qu'on peut remarquer dans la confrontation de toutes ces données, dépend essentiellement de l'erreur fondamentale dans laquelle sont tombés tous les expérimentateurs, de vouloir considérer le seul facteur « température », alors qu'il s'agit principalement de cet autre facteur qu'il appelle « quantités de chaleur ». Nous sommes, en effet, en présence d'un phénomène chimique exothermique, dans lequel on peut considérer comme constante la quantité de chaleur développée par unité de volume dans un certain type de béton, alors que la distribution des températures

(1) Voir *Papers Am. Soc. of Civ. Eng.*, 1917, p. 1593.
(2) Voir *Engineering News-Record*, 1917, p. 253.

dépend de la durée du phénomène et surtout de la plus ou moins grande facilité qu'a la chaleur développée de se disperser dans l'atmosphère, en relation, évidemment, avec les dimensions et le coefficient de conductivité thermique du massif.

Les expériences ci-dessus relatées montrent, en outre, comme il est logique, que dans des massifs de masse plus considérable, la température atteint des valeurs plus élevées, car la chaleur, en raison de la faible valeur du coefficient de conductivité thermique du béton, ne se disperse que très lentement à l'extérieur, et, s'accumulant ainsi dans la masse, en élève la température.

D'après M. Ippolito, l'étude du phénomène devrait être reprise, à l'effet de déterminer :

a) La quantité totale de chaleur développée pendant la prise de l'unité de volume d'un béton de composition déterminée;

b) La loi de distribution, dans le temps de prise, de cette émission de chaleur.

Dans ce but, il a entrepris des recherches expérimentales actuellement en cours; les résultats pratiques en seront publiés prochainement. Mais, en raison de l'intérêt immédiat que présente la question, il en établit une détermination analytique comme suit :

Supposons que le bétonnage d'un arc, d'une voûte ou d'un mur, puisse être exécuté entièrement dans un délai très court, de telle manière que la prise du ciment pourrait commencer aussitôt après — mais seulement après — l'achèvement de cette opération. Le phénomène de la transmission de chaleur serait, dans ce cas, caractérisé (comme dans les cas ci-dessus relatés et en négligeant toujours les perturbations périphériques) par le fait que les isothermiques sont des surfaces parallèles aux parements.

L'équation différentielle de la transmission s'obtiendra en remarquant que, dans l'unité de temps, à travers l'unité de

surface d'une isothermique, passe la quantité de chaleur :

$$-\mathrm{K}\,\frac{\delta t}{\delta x}$$

et à travers l'unité de surface d'une isothermique éloignée de (dx) de la première, la quantité

$$\mathrm{K}\,\frac{\delta}{\delta x}\left(t+\frac{\delta t}{\delta x}\,dx\right)$$

La différence $\mathrm{K}\,\frac{\delta^2 t}{dx^2}\,dx$ se trouvera emmagasinée dans l'élément de volume (dx) compris entre les deux isothermiques,

Soit (q) la quantité de chaleur qui, dans l'unité de temps se développe par unité de volume, sous l'influence du phénomène chimique de la prise du ciment; dans l'élément, ou couche, d'épaisseur (dx) sera emmagasinée la quantité totale de chaleur :

$$\left(q+\mathrm{K}\,\frac{\delta^2 t}{\delta x^2}\right)dx$$

qui en fera varier la température de $\frac{\delta t}{\delta \tau}$. On aura alors :

$$\left(q+\mathrm{K}\,\frac{\delta^2 t}{\delta x^2}\right)dx=\rho c\,\frac{\delta t}{\delta \tau}\,dx.$$

L'équation différentielle du problème sera alors :

$$(34_{\mathrm{B}}) \qquad q+\mathrm{K}\,\frac{\delta^2 t}{\delta x^2}-\rho c\,\frac{\delta t}{\delta \tau}=0.$$

Le terme (q) est fonction de (τ) et de (t), parce que le développement de chaleur varie non seulement pendant la prise, mais aussi avec la température à laquelle se produit cette prise.

On peut avoir une idée de la marche du phénomène en examinant quelques cas limites très simples. Par exemple, le développement de chaleur étant supposé se produire dans un temps très court, on peut admettre que la température du massif s'élève uniformément, et en tous points, au début du phénomène, avant que commence la véritable phase de trans-

mission. Et, si la température extérieure peut être supposée constante pendant cette période de transmission thermique, on sera reporté au cas d'un corps de chaleur uniforme qui se refroidit dans une atmosphère à température inférieure constante.

La phase de refroidissement serait caractérisée par la loi, bien connue, de Fourier :

$$t = \sum_{i=1}^{i=\infty} A_i \sin 2i\pi \frac{x}{h} . e^{-\left(\frac{2i\pi}{h}\right)^2 \cdot \frac{K}{\rho c} \cdot \tau}$$

dans laquelle les constantes (A) satisfont à l'équation :

$$T_0 = A_1 \sin 2\pi \frac{x}{h} + A_2 \sin 4\pi \frac{x}{h} + \ldots$$

pour chaque valeur de (x).

En particulier, après les premiers instants du phénomène, un très petit nombre de termes de la série peut le caractériser d'une manière très approchée.

Un cas-limite opposé peut, de même, être représenté par l'hypothèse dans laquelle le développement de chaleur ayant lieu dans un temps très long et suivant une loi constante, on pourrait considérer comme atteint, après une période initiale, un état de régime pour lequel :

$$\frac{\delta t}{\delta \tau} = 0.$$

On aurait alors :

$$\frac{\delta^2 t}{\delta x^2} = -\frac{q}{K} .$$

d'où, par deux intégrations :

$$t = -\frac{1}{2}\frac{q}{K} x^2 + c_1 x + c_2.$$

Avec les conditions limites, si l'on suppose la température extérieure égale à zéro — ce qui ne touche en rien à la généralité de la question, — on aura :

$$t = \frac{1}{2}\frac{q}{K}\left(\frac{h^2}{4} - x^2\right). \qquad (35_B)$$

Dans le premier des deux cas-limites envisagés, la température maximum s'observe dans l'état initial et a pour valeur :

$$(36_B) \qquad t = \frac{Q}{\rho c},$$

en appelant (Q) la chaleur totale développée pendant la prise, par unité de volume. Dans le deuxième cas, la température maximum s'observe dans l'état de régime, qui est représenté par la loi parabolique (35B), et a pour valeur :

$$(36'_B) \qquad t = \frac{1}{8} \cdot \frac{q}{K} \cdot h^2.$$

Dans une construction de grandes dimensions, présentant des épaisseurs très notables, la température au centre de la masse tend vers un rapprochement significatif avec la valeur donnée par la formule (36B); au contraire, dans une construction à minces parois, la distribution des températures se rapproche de la forme (36'B), et ceci d'autant plus que l'épaisseur est plus mince et la prise du ciment plus lente.

8. — Contraction du béton de ciment pendant la prise.

La contraction ou « retrait » du béton pendant sa prise semble sortir du cadre des variations thermiques que nous venons d'examiner. Elle s'y apparente étroitement, toutefois, car ses effets sont étrangement semblables à ceux produits par une diminution de température, et son étude ne saurait être nulle part mieux placée qu'ici.

Depuis longtemps, en effet, il est notoire que le béton de ciment subit une contraction fort appréciable pendant la prise.

Des expériences effectuées en Allemagne avant et pendant la guerre (1), il résulte que la contraction de volume du béton

(1) Voir *Mitteilungen*, 1915 et 1918, et aussi *Armierte Béton*, 1915.

croît avec la proportion de ciment entrant dans sa composition et décroît, au contraire, à mesure que s'élève sa température de cuisson.

Dans un béton malaxé avec un minimum d'eau et maintenu convenablement humide, la contraction est généralement minimum (1) : les mesures effectuées en Allemagne accusent des valeurs oscillant entre 0,0003 à 0,0005 par unité de longueur.

D'autre part, M. A.-T. Goldbeck (2), en Amérique, a procédé à une série d'expériences qui ont donné, par une concordance frappante avec les précédentes, une valeur de 0,0005 égale au maximum précité, cependant que d'autres expériences (4), effectuées sur un bloc de béton à 1 de ciment pour 2 de sable et 4 de gravier, maintenu pendant 100 jours à une température constante de 22°, ont accusé, pour valeur de la contraction linéaire, le chiffre de 0,0004, moyenne entre les 2 chiffres allemands rappelés plus haut.

Une exception notoire est, cependant, à signaler aux effets produits — en règle générale — par le phénomène de retrait :

Si le béton fait sa prise dans l'eau, au lieu d'une contraction, on constate, en effet, une dilatation, dont la valeur est sensiblement égale à la moitié de celle de la contraction qu'on aurait observée dans une prise à l'air.

L'importance de ce phénomène de contraction — ou retrait — a été mise en évidence dans plusieurs cas de fissurations de ponts en béton, spécialement en Allemagne (3), au point que les règlements les plus récents sur l'emploi du béton armé imposent d'en tenir compte, non seulement pour les efforts engendrés dans le béton, mais aussi pour ceux qui en découlent pour les armatures.

C'est ainsi que le « Règlement prussien pour les ouvrages

(1) Voir *Comptes rendus du laboratoire de Gross-Lichterfelde*, 1916.
(2) Voir *Concrete Age*, août 1911.
(3) Voir *Bulletin of Iowa Eng. Exper. Station*, n° 30.
(4) Voir *Zeitschrift für Bauwesen*, 1915, et *Zentralblatt des Bauwesen*, 1916.

en ciment armé » prescrit l'assimilation des effets de la contraction à une diminution de température de 15° (ce qui revient à adopter un coefficient de 0,0002), admettant toutefois que, lorsque les calculs tiennent compte des efforts thermiques, le travail du béton peut atteindre 60 $kg.cm^2$, et celui de l'acier 12 $kg.mm^2$.

Semblablement, le Règlement wurtembergeois admet que les valeurs usuelles de ces mêmes taux de travail pourront être augmentées de 1/3 si l'on tient compte des effets thermiques, et même de 1/2 s'il est également tenu compte de la contraction. Enfin, le Règlement suisse assimile également la contraction à une diminution de température de 20°, correspondant à un coefficient de contraction de 0,00025 *m.* par mètre.

Pendant une première phase du phénomène, l'effet de la contraction est d'abord favorable à la résistance parce qu'il équilibre, en partie, la dilatation due à la chaleur dégagée pendant la prise, mais il devient ensuite défavorable, dès que cesse l'effet de ce dégagement de chaleur.

On peut atténuer les effets dus à la contraction en exécutant le bétonnage dans des conditions de température inférieures à la moyenne, c'est-à-dire pendant la saison d'hiver, à la condition, toutefois, que la température ne soit pas basse au point d'empêcher la prise et le durcissement réguliers du béton.

En procédant ainsi, on réduit non seulement l'effet dû aux manifestations thermiques inhérentes à la prise, lesquelles sont très ralenties aux basses températures, mais aussi celui dû à la contraction du béton, car, lorsque la construction est soumise aux rigueurs maxima de l'hiver, *ipso facto*, sa contraction thermique est moindre que si le bétonnage eût été exécuté à une température extérieure moyenne.

9. — Résultats des mesures directes de température exécutées dans ces dernières années.

Parallèlement à son évolution découlant des recherches et expériences de laboratoire, l'étude des efforts thermiques peut évidemment retirer grand avantage des expériences et des constatations effectuées, à pied d'œuvre, sur des constructions achevées ou en cours d'exécution; mais il ne semble pas, cependant, que ce champ d'expériences pratiques ait été bien défriché, car c'est seulement dans ces dernières années que les chercheurs paraissent s'y être engagés, et, à coup sûr, les résultats définitifs ne sont pas encore acquis, ce qui se peut attribuer au fait que la recherche expérimentale n'a été ni guidée par la recherche analytique, ni appuyée sur elle; et c'est un grand mérite pour M. Ippolito d'en avoir donné un essai aussi clairement que simplement présenté, car tout indique qu'elle avait, jusqu'ici, été trop négligée. Bien connues sont les observations faites par Guidi, au pont de Morbegno, sur l'Adda, en 1904-1905, et grâce auxquelles il put être établi que la température moyenne journalière pénètre dans la masse de la voûte. Ce résultat est conforme à ceux qu'on peut déduire de l'analyse théorique de M. Ippolito. Il s'agissait, en effet, d'un arc de 1,50 *m.* d'épaisseur, supportant de petites voûtes d'élégissement. En supposant que l'extrados soit complètement en contact avec l'atmosphère, on aurait, au tableau XX :

$$T_m = 0{,}99 . T_e$$

pour l'oscillation annuelle, et :

$$T_m = 0{,}13 . T_e$$

pour l'oscillation journalière.

La valeur élevée du premier de ces coefficients, très voisin de l'unité, montre précisément que la température moyenne journalière pénètre dans toute la masse. Encore y a-t-il lieu

de considérer, en outre, que le pont est construit en granit, et que, par suite, la valeur de λ est encore moindre que pour le béton. Le coefficient de T_e en sera donc augmenté.

Si les observations eussent été effectuées heure par heure, on aurait pu déterminer, semblablement, la propagation de l'oscillation journalière dans l'intérieur de la voûte.

Quelques années plus tard, M. F. von Emperger (1), dans une étude concernant les effets de la dilatation sur les arcs encastrés, exprima l'avis que, dans les calculs, il y a lieu de considérer une oscillation thermique d'autant plus petite que l'arc considéré présente une épaisseur plus grande. Et il propose d'adopter les valeurs suivantes :

Pour une épaisseur de 0,20 *m.*, une oscillation de 40°, de + 25° à — 15°.

Pour une épaisseur de 0,50 *m.*, une oscillation de 34°, de + 22° à — 12°.

Pour une épaisseur de 1,00 *m.*, une oscillation de 24°, de + 17° à — 7°.

Ces propositions sont en plein accord avec la marche réelle du phénomène; toutefois, avec le secours du procédé analytique, et pour des conditions climatériques données, les hypothèses à considérer peuvent être plus rationnellement établies cas par cas.

***

Nombreuses sont aussi les observations expérimentales qui ont été faites pour établir la relation entre les diverses variations thermiques et les déformations en découlant pour des points déterminés (exhaussement ou abaissement de la clef dans les ponts; ouverture des lézardes dans les barrages, etc.), parmi lesquelles les plus remarquables sont dues à M. T. Merriman, qui effectua des observations thermométriques au barrage de Boonton, sur le fleuve Rockaway (État de New-

(1) Voir *Béton und Eisen*, 1909.

York) (1), et à MM. C.-H. Paul et A.-B. Mayhew, qui en exécutèrent de semblables dans le barrage d'Arrow-Rock (2), un des ouvrages les plus hauts existant encore à l'heure actuelle. Le barrage de Boonton, du type *à gravité*, fut construit de 1902 à 1904 en béton *cyclopéen*, constitué par des blocs de gneiss noyés dans du béton de ciment, de proportions 1 : 3 : 6. Le rapport, en volume, des blocs au béton est de 1 : 1. Sur ce barrage ont été effectuées des mesures de lézardes, opérations assez courantes et qui ne présentent rien de particulier; mais aussi — ce qui est plus important — on a mesuré la température à l'intérieur du massif, avec des couples thermo-électriques placés, pendant la construction — et au fur et à mesure du bétonnage — à différentes profondeurs dans l'inrieur de la masse.

Les résultats fournis par plusieurs de ces couples sont, malheureusement, à délaisser, car ils furent troublés, semble-t-il, par des réactions chimiques entre la *vulcanite* d'isolement et les conducteurs métalliques (3). Toutefois, les résultats acceptables, bien que peu nombreux, sont d'un grand intérêt. Les observations se poursuivirent de juin 1903 jusqu'à mai 1906, (avec, cependant, pour quelques couples, une période un peu plus courte), à raison d'une lecture par jour, et M. Merriman réunit ensuite, dans un graphique, les résultats obtenus ; mais ce graphique ne montre pas assez clairement la marche du phénomène : les courbes étant, surtout pour la température extérieure, trop mouvementées, parce que découlant d'observations troublées par des oscillations secondaires perturbatrices, constituant des irrégularités d'une durée de 5 ÷ 10 jours.

A remarquer, toutefois, que, conformément aux résultats de l'étude qui précède, ces perturbations irrégulières sont très

(1) Voir *Papers Am. Soc. Civ. Eng.*, août 1908.

(2) Voir *Papers Am. Soc. Civ. Eng.*, 1915, p. 789 et 2009.

(3) En suite de quoi, M. Merriman suggère d'adopter, dans des installations semblables, une couche isolante de fils de soie, recouverts de paraffine.

peu ressenties dans l'intérieur du barrage. Les diagrammes des températures intérieures présentent, en effet, une allure beaucoup plus régulière que celle des diagrammes de température extérieure.

Dans le but de bien mettre en évidence les effets de l'oscillation annuelle des températures, qui est la plus importante, M. Ippolito a établi, de son côté, le graphique faisant l'objet de notre planche 23-24, dans lequel il a tracé le profil du barrage, avec l'indication de l'avancement du bétonnage, et des positions des couples thermo-électriques, repérées par des numéros d'ordre. Il a ensuite tracé les courbes des températures extérieures et des températures intérieures, en substituant aux valeurs journalières les moyennes mensuelles.

Le phénomène se trouve ainsi régularisé (par un procédé bien connu en *statistique*) et libéré des oscillations secondaires perturbatrices (qui, du reste, sont très peu ressenties dans l'intérieur), et la loi de l'oscillation fondamentale annuelle se trouve ainsi dégagée et soulignée. A regretter, toutefois, l'absence de toute indication sur le niveau de l'eau dans le réservoir en fonction du temps, données qui eussent fourni très certainement, l'explication de la plupart des irrégularités dans les courbes des températures intérieures.

Par ailleurs, M. Merriman a observé également le phénomène du décroissement de l'amplitude de l'oscillation en fonction de la distance au parement ainsi que le phénomène du retard de la phase. Pour cette dernière, il reconnaît aussi la loi de proportionnalité entre la phase et la distance en question, confirmant, de ce fait, les résultats de la détermination analytique qui précède, tant à réservoir plein qu'à réservoir vide, pour les barrages de grande épaisseur.

Pour les amplitudes, M. Merriman donne une formule qui peut s'écrire, avec nos notations :

$$T_x = \frac{T_e}{2{,}07 \sqrt[3]{\frac{h}{2} - x}},$$

les longueurs étant exprimées en décimètres.

Pour (T_e) il admet une demi-amplitude de 37,5, correspondant à une oscillation de 75° centigrades.

Cette loi ne nous semble pourtant pas susceptible d'être retenue : l'oscillation extérieure admise étant de 75° en tenant compte de la différence entre la plus haute température momentanée d'été et la plus basse d'hiver (+ 47° et — 28°), alors qu'on a vu que les oscillations journalières ne sont pratiquement pas ressenties dans l'intérieur de la masse du barrage. Pour obtenir un résultat plus conforme à la réalité, il eût fallu prendre la différence entre le maximum et le minimum des moyennes journalières.

En outre, les valeurs adoptées pour les températures intérieures se ressentent encore trop fortement des effets du phénomène thermique dû à la prise du ciment. Ce phénomène est très nettement indiqué par le graphique de la planche 23-24, où l'on voit que l'élévation de température initiale qui en découle influence la distribution des températures pendant une période de plusieurs années. Des observations effectuées heure par heure, au couple 11, par M. Merriman, immédiatement après le bétonnage, ont accusé une température maximum de 38° après 16 heures de prise, avec une température extérieure moyenne de 20°. Ce maximum fut, du reste, très peu soutenu, et la température commença à redescendre assez rapidement.

De l'examen de la planche 23-24 on peut déduire que, pendant les premières années de la construction, l'oscillation thermique, en un point intérieur quelconque, assume une valeur moyenne supérieure de 6 ÷ 8 degrés à la moyenne atmosphérique.

D'après les considérations théoriques développées ci-dessus, l'examen du graphique de la planche 23-24 est d'un très grand intérêt, et il est certainement regrettable que les observations lui servant de base n'aient pas été poussées plus loin.

Avant tout, il convient de remarquer que l'oscillation thermique annuelle, libérée des perturbations, peut très bien être

représentée par une courbe sinusoïdale qui, sur l'épure, correspond au tracé pointillé.

Les oscillations, dans les points très éloignés du parement amont (couples 9 et 10), présentent également un caractère sinusoïdal très accentué; par contre, pour les points voisins de ce parement (couples 5 et 6), on remarque de brusques variations, évidemment produites par le remplissage du réservoir.

La valeur moyenne de chaque oscillation complète ressent l'effet de la chaleur accumulée pendant la prise, et va s'abaissant, chaque année, au fur et à mesure que cette chaleur se disperse dans l'atmosphère, mais, avant de s'annuler, cet effet se poursuit un certain nombre d'années; sa persistance est, du reste, plus accentuée dans les points intérieurs (couples 10 et 6) que dans ceux qui avoisinent les parements (couples 5 et 9).

Enfin, il est évident que le retard de la phase est d'autant plus grand que le point considéré est situé plus profondément à l'intérieur du massif bétonné.

Des comparaisons précises entre les données de l'expérience et les résultats théoriques seraient possibles si l'on connaissait le diagramme correspondant des hauteurs de l'eau dans le réservoir et si l'on possédait aussi sur la phase du régime du phénomène des observations suivies pendant les années postérieures à 1906, au cours desquelles on aurait pu considérer comme atteint l'état de régime. Toutefois, les résultats, même approximatifs, que l'on peut déduire des observations acquises sont encore assez suggestifs pour demeurer intéressants.

Au point 9, par exemple, l'oscillation atteint, dès la première année, une amplitude égale aux 7/10es de l'amplitude extérieure — résultat vérifié analytiquement (voir tableau XIX) — pour un point situé à 0,74 *m.* du parement; alors que l'amplitude du point 10, au contraire, diminue rapidement, chaque année, du fait de la dispersion de la chaleur de

la prise, et il n'est malheureusement pas possible, en raison de l'arrêt prématuré des observations, de vérifier si elle atteint la valeur de (0,09 T_e) calculée dans le tableau XIX, p. 130.

***

Des observations tout à fait semblables ont été effectuées, avons-nous dit, sur le barrage d'Arrow-Rock, avec des appareils thermo-électriques plus précis, et en prenant soin de relever non seulement la température atmosphérique, mais aussi celle des parois du barrage, à l'aide de thermomètres à mercure.

Des données ainsi recueillies on pourrait déduire une confirmation très exacte de la théorie, mais, malheureusement, les observations n'ont été soutenues que pendant deux années — soit moins longtemps encore qu'au barrage de Boonton — et l'on ne trouve aucune trace, dans les *Papers of Am. Soc. of Civ. Eng.*, d'ultérieurs résultats pouvant provenir d'autres mesures. Ce qui caractérise, pourtant, les observations dont s'agit, c'est l'étude des variations diurnes des températures, en état de régime, sur les points de l'intérieur de la masse : études poursuivies pendant 48 heures consécutives, avec observations toutes les 2 heures.

Pour trois couples thermo-électriques placés à — 0,30 *m.*, — 0,60 *m.* et — 1,00 *m.* environ du parement, on constata, entre l'oscillation thermique aux points considérés et l'oscillation extérieure, mesurée sur le parement, des rapports respectivement égaux à 0,043, 0,017 et 0,00.

Avec la loi (18B) établie par M. Ippolito, et pour une valeur de $\lambda = -1{,}05$, c'est-à-dire très proche de la valeur moyenne $\lambda = -1$ adoptée, on aurait pour valeurs des rapports ci-dessus, respectivement 0,043, 0,018 et 0,00. Le petit écart entre les secondes de ces valeurs s'explique par la seule difficulté qu'il y a à apprécier, avec des couples thermo-électriques, des variations thermométriques de l'ordre d'un

demi-degré centigrade et même moins... Une concordance plus accentuée encore peut être observée dans le retard de phase qui, pour le point situé à 0,30 *m.* de profondeur, fut établi de 12 heures, alors que la formule (18B) donne :

$$\frac{\Theta}{2\pi}\lambda x = \frac{24}{2\pi} \times 1{,}05 \times 3 = \mathbf{12\ h.\ 05.}$$

Pour ce qui concerne l'oscillation annuelle, pendant la période biennale sur laquelle portèrent les observations faites, MM. Paul et Mayhew, se reportant aux températures moyennes journalières, en déduisent, pour trois points situés à — 0,60 *m.*, — 3,00 *m.* et — 18,00 *m.* du parement le plus proche, que le rapport $\frac{T_x}{T_e}$ atteint les valeurs respectives 0,675, 0,164 et 0,000, alors que le calcul effectué à l'aide de la formule (18_B), avec une valeur de $\lambda = -0{,}0555$, peu différente de la valeur moyenne — 0,05, donne pour valeurs du rapport $\frac{T_x}{T_e}$ respectivement 0,690, 0,156 et 0,000. La concordance est, comme on voit, tout à fait remarquable; les écarts constatés sont très certainement dus aux perturbations atmosphériques locales et momentanées, dont on ne peut évidemment pas tenir compte dans la détermination d'une méthode analytique de calcul.

***

D'autres mesures thermométriques, également de grand intérêt, furent exécutées en 1909-1912, par MM. C.-S. Nichols et C.-B. Mc Cullough (1), sur des arches de ponts, chargées par des remblais, entre les tympans; spécialement aux ponts de Squaw-Creek, près d'Ames (Iowa), et Walnut Street, près des Moines (Iowa), tous les deux en béton armé. Les cordes de ces arcs mesurent respectivement 14,00 *m.* et 21,00 *m.*,

(1) Voir *Bulletin of the Iowa State College of Agriculture and Mechanic*, n° 30.

tandis que la flèche est, pour tous les deux, d'environ 3,45 *m.* Des résultats expérimentaux on put déduire :

a) Que l'oscillation thermique annuelle dans l'intérieur de la masse, pour des arcs ayant une épaisseur de 1,50 ÷ 1,80 *m.* atteint environ les 3/4 de l'oscillation des températures journalières moyennes extérieures;

b) Que la température maximum due à la prise du béton varie de 34° à 54° et se manifeste de 18 heures à 200 heures, environ, après le bétonnage;

c) Que l'amplitude de l'oscillation intérieure, pendant la première année, se ressent de la chaleur dégagée par la prise, et dépasse d'environ 10 % sa valeur moyenne des années ultérieures;

d) Que le retard de phase, dans les points les plus éloignés de l'intrados, est d'environ 4 jours et diminue, pour les autres points, proportionnellement à leur distance du parement exposé à l'air.

Les résultats expérimentaux *a*) et *d*) ci-dessus sont en parfait accord avec ceux que donne l'analyse, pour un arc présentant un de ses parements aux oscillations atmosphériques, et l'autre à une température constante (extrados recouvert avec le remblai par exemple).

Toutes les recherches expérimentales ci-dessus reportées peuvent, cependant, être considérées comme incomplètes, en raison de la brièveté des périodes d'observations ou encore du trop petit nombre d'observations effectuées pendant ces périodes.

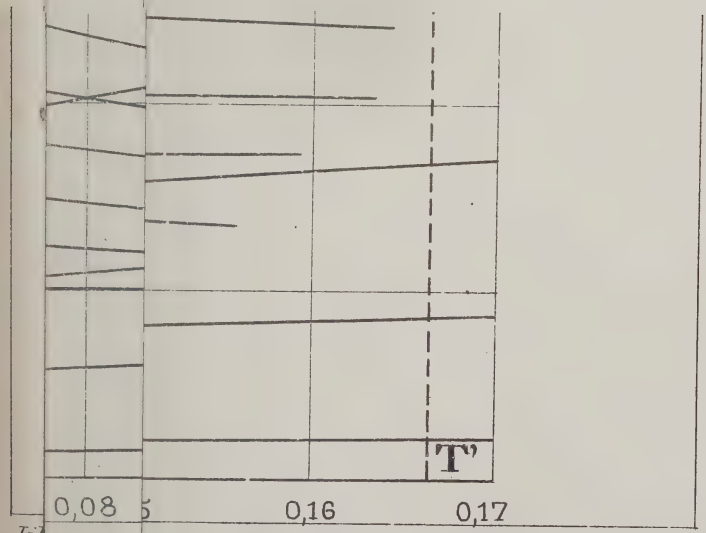
Des expériences plus amples seraient nécessaires pour l'obtention de résultats vraiment définitifs. Mais, en leur donnant pour guides ceux déjà acquis, tant analytiquement qu'expérimentalement, on doit atteindre des résultats à peu près décisifs sur la question : de quoi récompenser largement la patience et le travail qu'il faudra dépenser pour y parvenir.

M. Ippolito s'est attaqué à cette passionnante question avec

une ardeur telle que nous ne doutons pas qu'il nous apporte à bref délai, indépendamment de ceux que ne manquera pas de faire surgir par ailleurs l'émulation, de précieux résultats expérimentaux à l'appui de la magistrale contribution que son travail vient d'apporter à cette importante question des Barrages en arc. Ce travail, à lui seul, du reste, constitue une remarquable étude technique, méritant, à ce seul titre, d'être connue de tous les techniciens; et nous nous estimerons vraiment heureux si cette adaptation française du texte original — que nous avons voulue aussi fidèle que possible et préparée de concert avec l'auteur — peut contribuer à sa diffusion.

IMPR. DE MONTLIGEON. LA CHAPELLE-MONTLIGEON (ORNE). — 15537-6-27.

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF ILLINOIS

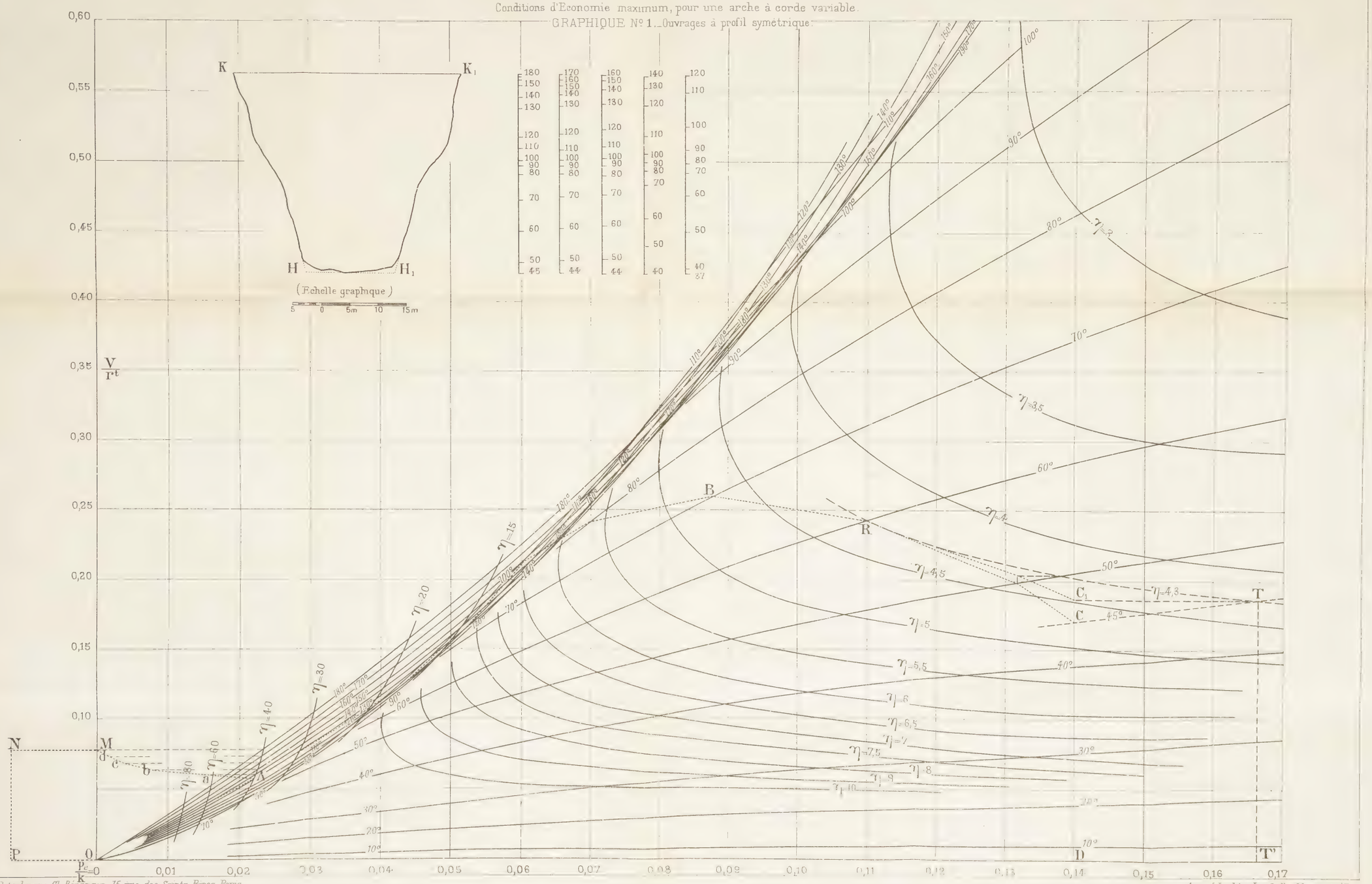


Lit
Autog. J. Jacobé. _ Imp. Gaillac-Monrocq et Cie Paris.

CONTRIBUTION A L'ETUDE DES BARRAGES EN ARC

Conditions d'Economie maximum, pour une arche à corde variable.

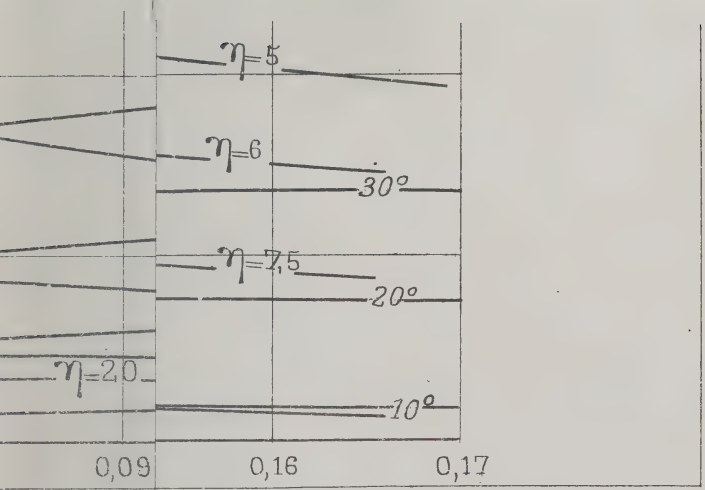
GRAPHIQUE N° 1. — Ouvrages à profil symétrique.



Librairie Polytechnique Ch. Béranger, 15, rue des Saints-Pères Paris.

Imp. Guillac-Mauroeq et Cie Paris.

UNIVERSITY OF ILLINOIS

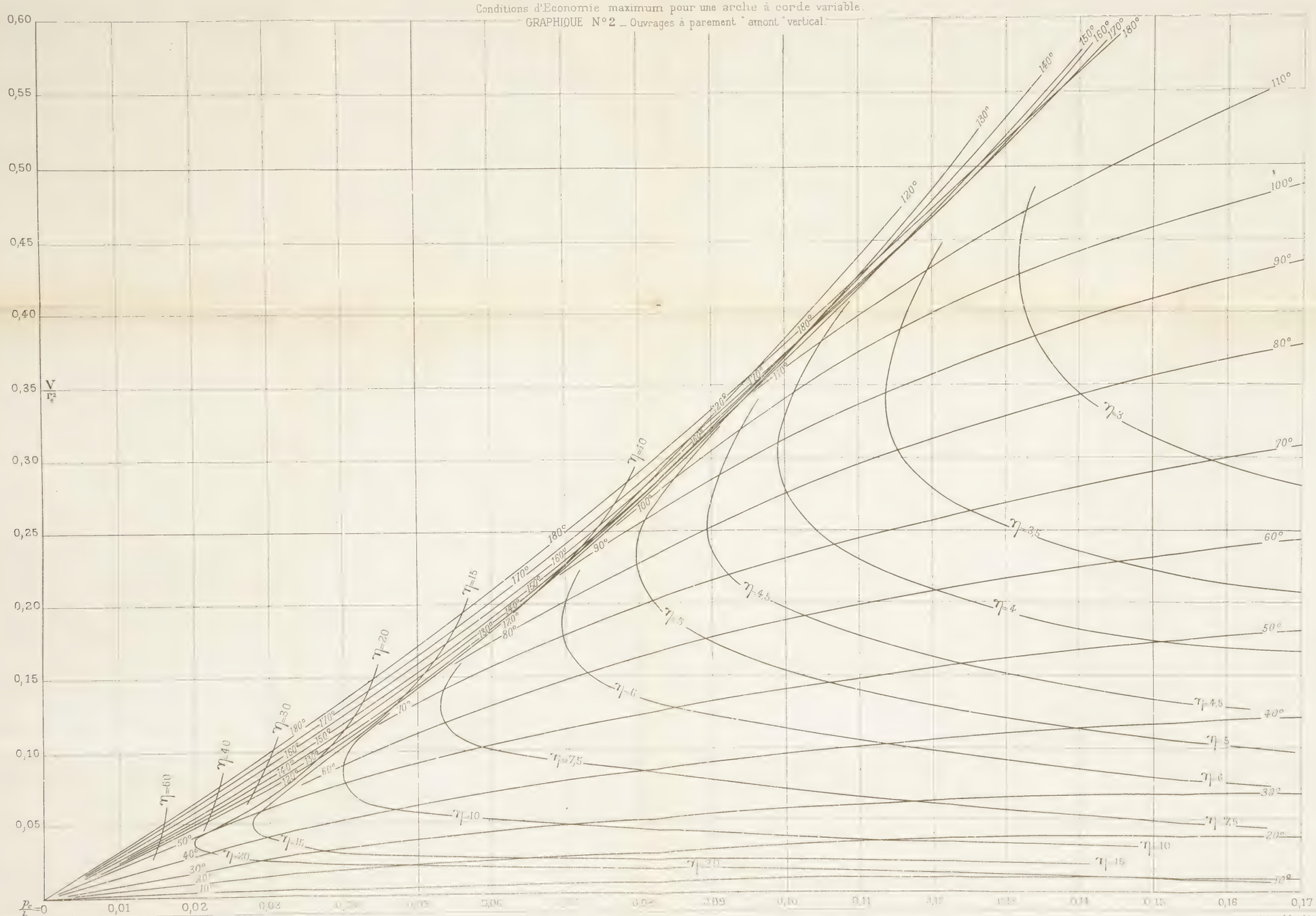


Autog. J. Jacobé. — Imp. Gaillac-Monrocq et Cie

CONTRIBUTION A L'ETUDE DES BARRAGES EN ARC

Conditions d'Economie maximum pour une arche à corde variable.

GRAPHIQUE N° 2 — Ouvrages à parement "amont" vertical.



Librairie Polytechnique Ch. Béranger, 15, rue des Saints-Pères, Paris.

Autog. J. Jacobé — Imp. Caillac-Monrocq et Cie

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF ILLINOIS

Novembre

Décembre

Décembre

Janvier

Février

Mars

Avril

Mai

Année 1906.

Autog. J. Jacobé. — Imp. Gaillac-Monrocq et Cie Paris.

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DES BARRAGES EN ARC.

Influence des variations de Température. (Chap. III.)

Fig. 1.

Graphique des effets de l'oscillation annuelle de température observés au barrage de Boonton, sur le Rockaway (U.S.A.), en relation avec l'avancement du bétonnage

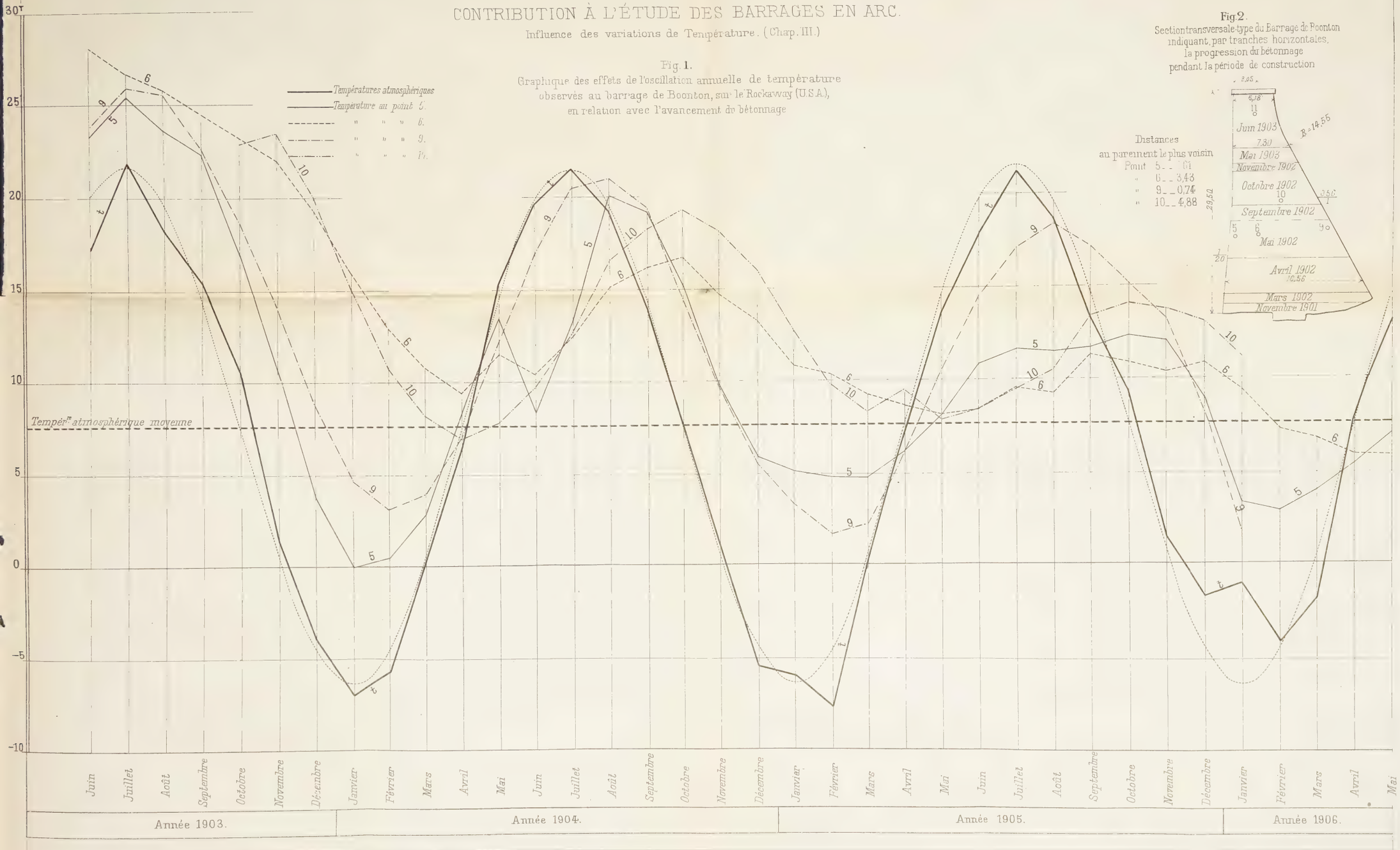


Fig. 2.

Section transversale-type du Barrage de Boonton indiquant, par tranches horizontales, la progression du bétonnage pendant la période de construction

Distances au parement le plus voisin

Point 5 . . 6,1
" 6 . . 3,43
" 9 . . 0,74
" 10 . . 4,88

Librairie Polytechnique Ch. Béranger, Editeur, 15 rue des Saints-Pères, Paris.

Autog. J. Jacobé. — Imp. Gaillac-Monrocq et Cie Paris.

EN VENTE A LA MÊME LIBRAIRIE

R. et M. KŒCHLIN. — Mécanisme de l'eau et principes généraux pour l'établissement d'usines hydro-électriques, par René KŒCHLIN, ingénieur, ancien élève de l'École polytechnique de Zurich, et Maurice KŒCHLIN, ingénieur, ancien élève de l'École d'Ingénieurs de Lausanne.

TOME I. — MÉCANISME DE L'EAU.

Introduction. Mécanisme des cours d'eau. Cycle de l'eau dans la nature et énergie disponible. Précipitations atmosphériques. Débits des cours d'eau. Étude théorique du mouvement uniforme de l'eau dans un cours d'eau. Étude théorique de la formation du profil en travers et du profil en long d'un cours d'eau naturel. Adaptation des lois théoriques à l'explication de la formation du lit des cours d'eau. Récapitulation des lois sur la formation des cours d'eau naturels et sur le mouvement de l'eau dans ceux-ci. Transport des matériaux (galets, graviers, sables) dans un cours d'eau. Formation de la glace, charriage de celle-ci dans les cours d'eau. Mécanisme des glaciers. Érosion glaciaire et érosion fluviale. Dépôt des alluvions. Les lacs et leur formation. Mécanisme de l'eau dans les tuyaux et les différents ouvrages d'une installation hydro-électrique. Étude théorique du mouvement uniforme de l'eau sous pression dans les tuyaux. Formules pratiques pour le mouvement uniforme de l'eau dans les tuyaux. Similitude de la formule pour tuyaux avec celle des canaux à ciel ouvert. Comparaison des différentes formules. Rétrécissement ou élargissement de profil dans un cours d'eau ou dans un canal. Déversoirs et barrages. Calcul de la courbe de remous produite par un barrage. Le coup de bélier. Les turbines hydrauliques. Un volume in-8° raisin (16 × 24) de 328 pages, avec 120 figures dans le texte et 1 planche en couleurs hors texte. Broché (810 gr.). . . **65 fr.**

TOME II. — PRINCIPES GÉNÉRAUX POUR L'ÉTABLISSEMENT D'USINES HYDRO-ÉLECTRIQUES.

Classification des différents modes d'utilisation de la force motrice hydraulique et des différentes sortes de barrages. BARRAGES *sur rivières et sur fleuves.* — Dispositions générales à observer. Affouillement à l'aval d'un barrage. Étude du mouvement de l'eau à travers un barrage. Étude des sous-pressions sous les fondations dans un terrain perméable et calculs statiques. Observations sur les matériaux et procédés de construction pour barrages et autres ouvrages hydrauliques. Mode de construction des barrages fixes et de l'infrastructure des barrages mobiles. Barrages mobiles. Note sur le mécanisme de l'eau à mouvement varié dans un canal à veine libre. *Barrages-réservoirs ou barrages de vallées.* — Études générales préparatoires. Barrages formés par des digues en terre argileuse et en pierres sèches. Théorie des barrages et calcul d'un barrage de vallée en maçonnerie. Qualité de la maçonnerie (béton). Discussion du choix de la forme du barrage. Exemple de calcul des grandeurs et directions des efforts de compression maxima et des efforts de cisaillement effectif maxima. Circulaire ministérielle française du 19 octobre 1923, relative aux barrages-poids de grande hauteur. *Prise d'eau d'une installation hydro-électrique.* — Ouvrage de décantation. *Canaux d'amenée* (Canaux à veine libre). Choix du profil en travers. Théorie du mouvement de l'eau à travers un sol d'alluvions et étanchement des parois d'un canal. Formules pratiques pour le drainage des eaux souterraines (Galeries de drainage et puits). Un volume in-8° raisin (16 × 24) de 389 pages, avec 169 figures dans le texte et 4 planches hors-texte. Broché (950 gr.) . . . . . **70 fr.**

TOME III. — PRINCIPES GÉNÉRAUX POUR L'ÉTABLISSEMENT D'USINES HYDRO-ÉLECTRIQUES (SUITE).

Chambre d'eau et accessoires. Canalisations forcées (Tuyaux sous pression). Siphons et accessoires d'une canalisation forcée. Calcul d'une canalisation forcée métallique et en béton armé et de ses points d'appuis. Tunnels sous pression. Théorie et exemples de calcul. Cheminées d'équilibre. Théorie et calculs. Cheminées d'équilibre sans et avec déversoir. Démonstration de l'équation différentielle. Usine. Disposition du bâtiment de l'usine et des groupes électrogènes. Usines hydro-électriques du Niagara. Canal de fuite et ouvrages accessoires d'une installation hydro-électrique. Décharge d'un réservoir. Écluses, passes pour radeaux, rampes pour le halage de bateaux. Échelles à poissons. Considérations générales sur le choix des dispositions d'ensemble d'une installation hydro-électrique. Basses chutes, moyennes chutes, hautes chutes. Exemples d'aménagement rationnel de cours d'eau. Comparaison des prix de revient de l'énergie thermique (à vapeur) de l'énergie hydraulique et de l'énergie mixte. Choix du débit à admettre dans une installation hydraulique. Choix de la source d'énergie d'après les besoins de l'exploitation. Calculs relatifs à la puissance et à l'énergie disponibles d'une usine hydro-électrique. Établissement de la chute nette. Puissance et énergie produites par une usine située sur un cours d'eau sans réservoir d'accumulation. Amélioration des conditions d'exploitation d'une installation hydro-électrique par l'emploi de réservoirs d'accumulation et par l'accumulation d'énergie par pompage. Un volume in-8° raisin (16 × 24) de 389 pages, avec 145 figures dans le texte et une planche hors-texte. Broché (900 gr.) . **70 fr.**

Les prix ci-dessus ne sont donnés qu'à titre indicatif et sans engagement de la part de l'éditeur.